ОБ ОДНОМ НЕЯВНОМ МЕТОДЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.В. Романовский

Белгосуниверситет, механико-математический факультет,

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

root@romanovski.com

Под статистическим анализом (термин заимствован из [1]) случайного процесса $\xi(t)$ $(t \in \in T \subseteq \mathbb{R})$ мы будем понимать нахождение смешанных начальных моментов $E[\xi(t_1)\cdots\xi(t_k)]$ $(t_1,\ldots,t_k \in T)$, $k=1,2,\ldots$. Словосочетание "неявный метод" означает, что моменты находятся косвенным образом (из вспомогательного уравнения), без непосредственного вычисления интеграла $\int_{\mathbb{R}^k} x_1\cdots x_k dF_{\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k)}(x_1,\ldots,x_k)$. Такой подход полезен, если процесс $\xi(t)$ задан неявно, и нахождение семейства конечномерных распределений последнего вызывает значительные трудности. Недостатком неявного метода является то, что разрешимость вспомогательного уравнения может быть неоднозначной или иметь место, когда искомый момент не существует. Неявные методы статистического анализа рассмотрены в [2].

Пусть $\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\}$ — вероятностное пространство, $\{T,\Sigma,\mu\}$ $(T\subseteq\mathbb{R})$ — пространство с мерой, $k\in\{1,2,\ldots\}$, Ξ — некоторое банахово пространство $\mu\times P$-измеримых функций

$\xi : T \times \Omega \to \mathbb{C}$ таких, что $\|\xi\| = \int_T \sqrt[k]{E|\xi|^k}d\mu < \infty$. Рассмотрим уравнение (его частный случай см. в [3])

$$A\xi = \eta \quad (\xi, \eta \in \Xi) \tag{1}$$

относительно ξ, где $A : \Xi \to \Xi$ — линейный ограниченный оператор, $A > 0$, т.е. $A = UM_\zeta U^{-1}$, где $U, U^{-1} : \Xi \to \Xi$ — линейные ограниченные операторы, $M_\zeta : \Xi \to \Xi$ — оператор умножения на $\mu \times P$-измеримую функцию $\zeta : T \times \Omega \to \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

Пусть функции ξ и η удовлетворяют (1). Зафиксируем временные переменные $t_1, \ldots, t_k \in T$. Положим $\xi_j(t) = A^{j_1}\xi(t_1)\cdots A^{j_k}\xi(t_k)$, $\eta_j(t) = A^{j_1}\eta(t_1)\cdots A^{j_k}\eta(t_k)$ при $j = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ — множество упорядоченных наборов k целых неотрицательных чисел. Тогда, используя (1), получаем, что $\xi_j = \eta_{j-1}$ при $j - 1 = (j_1 - 1, \ldots, j_k - 1) \in \mathcal{J}$. Пусть F и G — экспоненциальные производящие функции k-мерных последовательностей $(E\xi_j)$ и $(E\eta_j)$ соответственно:

$$F(s) = \sum_{j \in \mathcal{J}} E\xi_j \frac{s^j}{j!}, \quad G(s) = \sum_{j \in \mathcal{J}} E\eta_j \frac{s^j}{j!} = \sum_{j-1 \in \mathcal{J}} E\xi_j \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{\partial^k}{\partial s_1 \ldots \partial s_k} F(s),$$

где $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k$, $s^j = s_1^{j_1} \cdots s_k^{j_k}$, $j! = j_1! \cdots j_k!$. Получено дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^k}{\partial s_1 \ldots \partial s_k} F = G. \tag{2}$$

Можно доказать, что $F(s) = E \sum_{j \in \mathcal{J}} \xi_j \frac{s^j}{j!} = E\left[(e^{s_1 A}\xi)(t_1) \cdots (e^{s_k A}\xi)(t_k)\right]$ и, поскольку $A > 0$ (в указанном выше смысле), то выполнены краевые условия

$$F|_{s_\nu \to -\infty} \to 0, \quad \nu = \overline{1, k}. \tag{3}$$

Аналогично, $G(s) = E\left[(e^{s_1 A}\xi)(t_1) \cdots (e^{s_k A}\xi)(t_k)\right]$. Очевидно, G — непрерывная функция, и поэтому задача (2), (3) имеет единственное решение $F(s) = \int_{-\infty}^{s_1} \cdots \int_{-\infty}^{s_k} G(\sigma) d\sigma_1 \ldots d\sigma_k$, при этом $F(0) = E\left[\xi(t_1) \cdots \xi(t_k)\right]$.

Литература

1. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.

2. *Кириллов П.В.* Случайные уравнения. Кишинев.. Штиинца, 1982.

3. *Романовский Ю. В., Янович Л. А.* Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений в вариационных производных // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1214–1221.