КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Корзюк, Е.С. Чеб, М.С. Ширма

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики,

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

korzyuk, cheb @bsu.by

В данной работе представлена методика решения смешанных задач для одномерного уравнения колебания струны, позволяющая записать решение в явном аналитическом виде. Метод продемонстрирован на примере решении первой смешанной задачи. Поскольку решение смешанной задачи можно записать с помощью формул, то это в принципе дает возможность решать задачи управления смещениями на концах струны, которые в последнее время рассмотрены в работах В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [1].

Рассмотрим первую смешанную задача о колебании струны длины l, концы которой в любой момент времени $t > 0$ движутся по заданным законам $\mu^{(1)}(t)$ и $\mu^{(2)}(t)$,

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \Omega = (0, l), \\
u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \\
u|_{x=0} = \mu^{(1)}(t), \quad u|_{x=l} = \mu^{(2)}(t), \quad t > 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Методом характеристик построено классическое решение задачи (1), которое в зависимости от расположения точки (t, x) в прямоугольнике $[0, T] \times \Omega$ задается формулами

$$u(t,x) = \frac{\varphi^{(k)}\big(x - at + kl\big) + \varphi^{(k)}\big(x + at - kl\big)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at+kl}^{x+at-kl} \psi^{(k)}(\xi)\, d\xi \tag{2}$$

для $\frac{kl}{a} \leqslant t \leqslant \frac{kl}{a} + \frac{x}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ либо для $\frac{kl}{a} \leqslant t \leqslant \frac{(k+1)l}{a} - \frac{x}{a}$, $\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l$;

$$u(t,x) = \frac{\varphi^{(k)}\big(x + at - kl\big) - \varphi^{(k)}\big(-x + at - kl\big)}{2} + \mu^{(1)}\Big(t - \frac{x}{a}\Big) + \frac{1}{2a} \int\limits_{-x+at-kl}^{x+at-kl} \psi^{(k)}(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

для $\frac{kl}{a} + \frac{x}{a} \leqslant t \leqslant \frac{(k+1)l}{a} - \frac{x}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$;

$$u(t,x) = \frac{\varphi^{(k)}\big(x - at + kl\big) - \varphi^{(k)}\big(-x - at + (k+2)l\big)}{2} + \mu^{(2)}\Big(t + \frac{x-l}{a}\Big) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at+kl}^{-x-at+(k+2)l} \psi^{(k)}(\xi)\, d\xi \tag{4}$$

для $\frac{(k+1)l}{a} - \frac{x}{a} \leqslant t \leqslant \frac{kl}{a} + \frac{x}{a}$, $\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l$;

$$u(t,x) = -\frac{\varphi^{(k)}\big(-x - at + (k+2)l\big) + \varphi^{(k)}\big(-x + at - kl\big)}{2} +$$

$$+\mu^{(1)}\Big(t - \frac{x}{a}\Big) + \mu^{(2)}\Big(t + \frac{x-l}{a}\Big) + \frac{1}{2a} \int\limits_{-x+at-kl}^{-x-at+(k+2)l} \psi^{(k)}(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

для $\frac{(k+1)l}{a} - \frac{x}{a} \leqslant t \leqslant \frac{(k+1)l}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ или для $\frac{kl}{a} + \frac{x}{a} \leqslant t \leqslant \frac{(k+1)l}{a}$, $\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l$. Здесь функции $\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$ вычисляются через заданные функции $\varphi, \psi, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ по указанным формулам. $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x), \psi^{(0)}(x) = \psi(x)$. Для $k = 2n$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\varphi^{(k)}(x) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \mu^{(1)}\left(\frac{(-1)^{i-1}x + \Big(i - \Big|\sin\frac{\pi}{2}\, i\Big|\Big)l}{a}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \mu^{(2)}\left(\frac{(-1)^{i}x + \Big(i - \Big|\sin\frac{\pi}{2}\,(i-1)\Big|\Big)l}{a}\right),$$

$$\psi^{(k)}(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \mu^{(1)'}\left(\frac{(-1)^{i-1}x + \Big(i - \Big|\sin\frac{\pi}{2}\, i\Big|\Big)l}{a}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \mu^{(2)'}\left(\frac{(-1)^{i}x + \Big(i - \Big|\sin\frac{\pi}{2}\,(i-1)\Big|\Big)l}{a}\right).$$

Для $k = 2n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\varphi^{(k)}(x) = -\varphi(l - x) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \mu^{(1)}\left(\frac{(-1)^{i}x + \Big(i - \Big|\sin\frac{\pi}{2}\,(i-1)\Big|\Big)l}{a}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\mu^{(2)}\left(\frac{(-1)^{i-1}x+\left(i-\left|\sin\frac{\pi}{2}i\right|\right)l}{a}\right),$$

$$\psi^{(k)}(x)=-\psi(l-x)+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\mu^{(1)'}\left(\frac{(-1)^{i}x+\left(i-\left|\sin\frac{\pi}{2}(i-1)\right|\right)l}{a}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\mu^{(2)'}\left(\frac{(-1)^{i-1}x+\left(i-\left|\sin\frac{\pi}{2}i\right|\right)l}{a}\right).$$

Теорема 1. *Предположим, что функции* $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi\in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu^{(i)}\in C^2[0,\infty)$, $i=1,2$, *и выполняются для них условия согласования*

$$\varphi(0)=\mu^{(1)}(0),\quad \psi(0)=\mu^{(1)'}(0),\quad a^2\varphi''(0)=\mu^{(1)''}(0),$$

$$\varphi(l)=\mu^{(2)}(0),\quad \psi(l)=\mu^{(2)'}(0),\quad a^2\varphi''(l)=\mu^{(2)''}(0). \tag{6}$$

Тогда в классе функций $C^2(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение и задачи* (1), *определяемое формулами* (2)–(5).

Используя метод Дюамеля, можно рассмотреть соответствующую смешанную задачу и для неоднородного уравнения колебания струны.

Литература

1. *Ильин В. А., Моисеев Е.И* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничных управлений смещениями на двух концах струны // Дифференц уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1528–1544.