ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

В. И. Репников

Белорусский государственный университет, пр. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
repnikov@bsu.by

Одним из основных современных подходов к конструированию эффективных алгоритмов численного решения дифференциальных задач является априорный учет качественных характеристик решаемой задачи. Традиционно такими характеристиками являются правильные (в смысле предсказуемые) поведения определенных функционалов от решения. Например, таковыми являются монотонное убывание какой-либо энергетической нормы точного решения (в случае линейной устойчивой системы с симметричной постоянной матрицей) (свойство устойчивости) и для такой же задачи монотонное поведение различных модификаций отношения Релея. Широко известно также свойство консервативности разностных для уравнений в частных производных [1], предполагающее выполнение на сеточном уровне некоторых законов сохранения, характерных для исходной дифференциальной задачи. Перечень подобных указанным выше свойств и требований можно продолжить. В то же время, было бы неплохо взглянуть на весь применяемый арсенал свойств с более общей точки зрения. Технической базой для такого перехода является групповой подход к исследованию дифференциальных уравнений, впервые примененный в работах норвежского математика Софуса Ли и затем развитый в работах многих других авторов. Ключевым моментом такого подхода является доставляемая теоремой Нетер и ее обобщениями [2] принципиальная возможность построения всех законов сохранения, которым удовлетворяет данная дифференциальная задача. При этом ключевым свойством является инвариантность дифференциальных уравнений относительно некоторой непрерывной группы преобразований. Следовательно, перенос аналогичных требований на сеточный уровень имел бы важное значение.

В настоящее время известны, по крайней мере, три существенно различных подхода к решению сформулированной выше задачи. Первый из них, описанный в работах Ю.И. Шокина, предполагает сохранение допускаемой исходной дифференциальной задачей группы преобразований не самой разностной схемой, а ее первым дифференциальным приближением [3]. Второй подход реализуется в работах В.А. Дородницына (см., например, [4]) и предполагает непосредственную адаптацию группы преобразований, допускаемой исходной дифференциальной задачей, непосредственно на сеточный уровень. При этом преобразованиям подвергается не только разностная схема, но и сетка, на которой она построена. Наконец, третий подход, реализуемый по отношению к методам решения задачи Коши, предполагает особо качественную обработку экспоненциального отображения, с помощью которого представимы группы преобразований. Этот подход ныне развивается в основном в работах западных исследователей Crouch, Grossman, Iserles, Munthe-Kaas и других (см., например, [5]).

В предлагаемом сообщении проводится сопоставительный анализ некоторых простейших алгоритмов с точки зрения изложенных выше подходов по применению непрерывных групп преобразований к сеточным методам.

Литература

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Шокин Ю.И.* Метод дифференциального приближения. Н.: Наука, Сибирское отделение, 1979.
4. *Дородницын В.А.* Групповые свойства разностных уравнений. М.: Физматлит, 2001.
5. *Munthe-Kaas H.* Lie — Butcher Theory for Runge — Kutta Methods // BIT. V. 35. 1995. P. 572–587.