ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л.И. Минченко, С.М. Стаховский

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,

П.Бровки 6, 220013 Минск, Беларусь

`inform@bsuir.by`

Пусть $f(x,y)$, $h_i(x,y)$ $i=1,\ldots,p$ – функции из $R^n\times R^m$ в R. Рассмотрим задачу минимизации по переменной y функции $f(x,y)$ на множестве $F(x)$, где

$$F(x)=\{y\in R^m|h_i(x,y)\leqslant 0 \quad i\in I,\ \ h_i(x,y)=0 \quad i\in I_0\},$$

$x\in R^n$, $I=\{1,\ldots,s\}$, $I_0=\{s+1,\ldots,p\}$ или $I_0=\emptyset$.

Обозначим $\varphi(x)=\min\{f(x,y)|y\in F(x)\}$, $\omega(x)=\{y\in F(x)|f(x,y)=\varphi(x)\}$.

Пусть $z=(x,y)$, $z_0=(x_0,y_0)$, $\bar z=(\bar x,\bar y)$, $I(z)=\{i\in I|h_i(z)=0\}$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$, $h=(h_1,\ldots,h_p)$. Обозначим $L(z,\lambda)=f(z)+\langle\lambda,h(z)\rangle$,

$$\Lambda(z,\lambda)=\{\lambda\in R^p \mid \nabla_x L(z,\lambda)=0,\ \lambda_i\geqslant 0 \ \text{ и } \ \lambda_i h_i(z)=0,\ i\in I\},$$

$$\Gamma(z_0;\bar x)=\{\bar y\in R^m \mid \langle\nabla h_i(z_0),\bar z\rangle\leqslant 0,\ i\in I(z_0),\ \langle\nabla h_i(z_0),\ \bar z\rangle=0,\ i\in I_0\},$$

$$\Gamma^*(z_0;\bar{x}) = \{\bar{y} \in \Gamma(z_0;\bar{x}) \mid \langle \nabla f(z_0),\ (\bar{x},\bar{y})\rangle = \min_{\bar{y}\in\Gamma(z_0;\bar{x})} \langle \nabla f(z_0), (\bar{x},\bar{y})\rangle\},$$

$$\Lambda^2(z_0;\bar{x}) = \{\lambda \in \Lambda(z_0) \mid \langle \nabla_x L(z_0,\lambda),\ \bar{x}\rangle = \max_{\lambda\in\Lambda(z_0)} \langle \nabla_x L(z_0,\lambda), \bar{x}\rangle\}.$$

Будем говорить, что многозначное отображение F R-регулярно в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестности $V(x_0)$ и $V(y_0)$ точек x_0 и y_0 такие, что

$$\rho(y, F(x)) \leqslant \alpha \max\{0,\ h_i(x,y),\ i\in I,\ |h_i(x,y)|,\ i \in I_0\}, \quad x \in V(x_0), \quad y \in V(y_0).$$

Многозначное отображение ω будем называть псевдолипшицевым в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, если существуют число $l > 0$ и окрестности $V(x_0)$ и $V(y_0)$ точек x_0 и y_0 такие, что $\rho(y, \omega(x_0)) \leqslant l|x - x_0|$ для всех $y \in \omega(x)$ I $V(y_0)$ и всех $x \in V(x_0)$.

В ряде работ изучались задачи, при условии единственности и липшицевости в точке x_0 решения $y(x)$. В данном докладе рассматривается многозначность $\omega(x_0)$.

Пусть $\bar{z}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $\bar{z}_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$.

Теорема 1. *Пусть:*

1) многозначное отображение F равномерно ограничено в точке x_0 и R-регулярно во всех точках $z_0 = (x_0, y_0)$ таких, что $y_0 \in \omega(x_0)$,

2) многозначное отображение ω псевдолипшицево в точке x_0,

3) функции h_i и f C^2 - дифференцируемы и их вторые производные локально липшицевы.

Тогда существует вторая производная функции φ в точке x_0 по любым направлениям $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in R^n$, причем

$$\varphi''(x_0;\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \min_{y_0\in\omega(x_0)} \min_{\bar{y}_1\in\Gamma^*(z_0;\bar{x}_1)} \max_{\lambda\in\Lambda^2(z_0;\bar{x})} 2\langle \nabla_x L(z_0,\lambda), \bar{x}_2\rangle + \langle \bar{z}_1, \nabla^2 L(z_0,\lambda), \bar{z}_1\rangle$$