О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ СТЕКЛОВА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

В.Г.Кротов, М.А.Прохорович

Белгосуниверситет, механико-математичесий факультет,

пр. Независимости 4, 220030, Минск, Беларусь

krotov@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и положительной борелевской мерой μ, которые связаны условием удвоения порядка $\gamma > 0$: существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\mu B(x, sr) \leqslant cs^{\gamma} \mu B(x, r), \quad x \in X, \quad s \geqslant 1.$$

Здесь $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ — шар с центром $x \in X$ радиуса $r > 0$.

Для $p > 1$ и $\alpha > 0$ введем пространство $W^p_\alpha(X)$, состоящие из функций $f \in L^p(X)$, для которых существует функция $g \in L^p(X)$ и множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$ со свойством

$$|f(x) - f(y)| \leqslant [g(x) + g(y)]d^\alpha(x,y), \quad x, y \in X \setminus E.$$

(см. [1] при $\alpha = 1$ и [2] при $\alpha > 0$). Будем предполагать, что класс Гельдера $H_\alpha = \{f : |f(x) - f(y)| \leqslant cd^\alpha(x,y)\}$ плотен в $W^p_\alpha(X)$ (для $0 < \alpha \leqslant 1$ это обязательно так). Кроме того, через

$$H^\delta(E) = \lim_{t \to +0} \inf \left\{ \sum_i r_i^\delta : E \subset \bigcup_i B(x_i, r_i), \quad r_i < t \right\}$$

обозначаем стандартную δ-меру Хаусдорфа на X ($\delta > 0$).

Свойства функций, обсуждаемые ниже, зависят от изменения их значений на множествах меры нуль. Поэтому мы считаем, что в каждой точке значения функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ определяются равенством

$$f(x) = \limsup_{r \to +0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f\, d\mu.$$

Теорема 1. *Пусть $p > 1$, $\alpha > 0$ и $f \in W^p_\alpha(X)$. Тогда для любого $\beta \in (0, \alpha)$ соотношение*

$$\lim_{r \to +0} r^{-\beta} \left[f(x) - \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f\, d\mu \right] = 0$$

выполнено всюду, кроме быть может, множества E с $H^{\gamma - (\alpha - \beta)p}(E) = 0$.

В частности, размерность Хаусдорфа множества E из теоремы 1 не превосходит $\gamma - (\alpha - \beta)p$. Для $\beta = 0$ это утверждение получено вторым автором [3]. Методы доказательства основаны на результатах работ [3, 4].

Литература

1. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Anal. 1996. V. 5. № 4. P. 403–415.

2. *Hu J.* A note on Hajlasz–Sobolev spaces on fractals // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 280. № 1. P. 91–101.

3. *Прохорович М.А.* Размерность Хаусдорфа множества Лебега для W^p_α на пространствах однородного типа // В сб. "Современные проблемы теории функций и их приложения". Тезисы докл. 14 Саратовской зимней школы (Саратов, СГУ, 2008). С. 154–155.

4. Кротов В.Г. Весовые L^p-неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой // Известия НАН Армении. Математика. 2006. Т. 41. № 2. С. 25–42.