НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.С. Илькив[1], **И.Я. Савка**[2]

[1] Национальный университет «Львовская политехника», С. Бандеры 13, 79013 Львов, Украина
ilkivv@i.ua

[2] Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Пидстрыгача НАН Украины, Научная 3б, 79069 Львов, Украина
s-i@ukr.net

Нелокальные задачи для уравнений в частных производных, вообще, являются некорректными, а их разрешимость связана с проблемами малых знаменателей; они неустойчивы относительно как угодно малых изменений коэффициентов задачи и параметров области.

Будем использовать такие обозначения: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $(ik, x) = i(k_1x_1 + k_2x_2)$, $\widetilde{k} = \sqrt{1 + {k_1}^2 + {k_2}^2}$, $s = (s_1, s_2) \in {\mathbb{Z}_+}^2$, $|s| = s_1 + s_2$; $\partial_t^n = \dfrac{\partial^n}{\partial t^n}$, $\partial_x^s = \dfrac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} x_2^{s_2}}$;

Ω — двумерный тор $\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi, j = 1, 2\}$, $\mathcal{D} = (0, T) \times \Omega$, $T > 0$;

$H_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$, — гильбертово пространство (пространство Соболева) 2π-периодических функций $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \varphi_k \exp(ik, x)$ с конечной нормой $\|\varphi\|_{H_q(\Omega)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \widetilde{k}^{2q}|\varphi_k|^2\right)^{1/2}$;

$H_q^r(\mathcal{D})$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, — банахово пространство функций $u = u(t,x)$ с конечной нормой $\|u\|_{H_q^r(\mathcal{D})} = \left(\sum_{j=0}^r \max_{t\in[0,T]} \|\partial_t^j u(t,\cdot)\|_{H_{q-j}(\Omega)}\right)^{1/2}$.

В области $\mathcal{D}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\partial_t^n u + \sum_{j=1}^n A_j(\partial_x)\partial_t^{n-j} u = 0, \qquad \partial_t^{j-1} u|_{t=0} - \mu\partial_t^{j-1} u|_{t=T} = \varphi_j(x), \ \ j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где $A_j(\partial_x) = \sum_{|s|\leqslant j} A_s^j \partial_x^s$, A_s^j, μ — вещественные числа, функции φ_j из $H_q(\Omega)$, и условие

$$\alpha_{11}a_1^2 + 2\alpha_{12}a_1a_2 + \alpha_{22}a_2^2 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_0 = 0, \quad (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0) \in \mathbb{R}^6, \tag{2}$$

определяющее кривую 2-го порядка в $\mathbb{R}^2$ относительно a_1, a_2, $(a_1, a_2) = (A_{n0}^n, A_{0n}^n)$.

Условия разрешимости таких задач в предположении независимости коэффициентов и параметров задач получены, например, в работах [1, 2]. В частности [1], с помощью метрической теории чисел установлена разрешимость задачи (1) для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T и почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^2$) векторов (a_1, a_2).

Эти результаты нельзя использовать в случае задачи (1), (2), поскольку кривая (2) имеет нулевую меру в пространстве $\mathbb{R}^2$. Возникает вопрос выбора кривых (2), для которых почти всюду на кривой задача (1) разрешима в шкале пространств Соболева.

Авторами установлены условия существования и единственности решения u задачи (1), (2) в случае центральной кривой. Эти условия связаны с проблемой малых знаменателей, которые возникают при построение соответствующего решения в виде тригонометрического ряда. Доказаны теоремы метрического характера об оценках снизу малых знаменателей на этой кривой.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГФФИ Украины (договор Ф-25/108).

Литература

1. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. К.: Наук. думка, 2002.

2. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К.: Наук. думка, 1984.