ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНДЕКСА В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

А.В. Гуминская [1], **П.П. Забрейко** [2]

[1] Белгосуниверситет, механико-математический факультет Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
aguminskaya@yandex.ru

[2] Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
zabreiko@mail.ru

Пусть X — банахово пространство, Q — замкнутое выпуклое неограниченное множество, A — вполне непрерывный оператор, оставляющий инвариантным множество Q. Предположим, оператор A дифференцируем по Фреше на бесконечности по множеству Q, т. е. в некоторой окрестности бесконечности допускает представление в виде $Ax = Bx + \omega(x)$, где $B = A'(\infty)$ — линейный оператор, а ω — нелинейный оператор, удовлетворяющий условию $\lim\limits_{x\in Q,\, x\to\infty} \|\omega(x)\| \cdot \|x\|^{-1} = 0$. Тогда, как показано в [1], линейный оператор B оставляет инвариантным множество $W_\infty = \{h \in X:\ x + th \in Q,\ \forall x \in Q,\ \forall t \in [0, +\infty]\}$ и, кроме того, является вполне непрерывным оператором (см. [2]).

Допустим, что спектральный радиус оператора B равен единице, и единица является простым собственным значением оператора B. Обозначим через L_∞ — максимальное подпространство $W_\infty \cap (-W_\infty)$, лежащее в W_∞. Рассматривается случай, когда собственный вектор u_* оператора B, соответствующий собственному значению 1, принадлежит множеству $W_\infty \setminus L_\infty$. Существует единственный с точностью до множителей функционал f_* такой, что $B^* f_* = f_*$ и $f_*(u_*) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\|u_*\| = 1$ и $f_*(u_*) = 1$. Обозначим через X_1 — одномерное подпространство, натянутое на вектор u_*, а через X_2 — подпространство нулей функционала f_*. Тогда пространство X представимо в виде прямой суммы подпространств X_1 и X_2, т. е. каждый элемент $x \in X$ записывается в виде $x = \xi u_* + v$, где $\xi \in \mathbb{R}$ и $v \in X_2$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in Q$.

Теорема. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) $f_*(\omega(\xi u_*, 0)) \neq 0$ *при больших положительных* ξ *;*

2) $|f_*(\omega(\xi u_*, v)) - f_*(\omega(\xi u_*, 0))| \leqslant \beta(\xi, \|v\|)$ *при больших* $\xi + \|v\| > 0$, *где* $\beta(\xi, \eta)$ — *некоторая неубывающая по второй переменной функция такая, что существует число* $l_* > 0$ *такое, что при больших* $\xi > 0$ *выполняется неравенство* $\beta(\xi, l_*\xi) < |f_*(\omega(\xi u_*, 0)|$;

3) *при достаточно больших по норме* $(\xi u_*, v) \in Q$ *значения оператора* $A_*(\xi u_*, v) = B(\xi u_*, v) + f_*(\omega(\xi u_*, 0))u_*$ *принадлежат множеству* W_∞. *Тогда бесконечно удаленная особая точка векторного поля* $\Phi = I - A$ *изолирована в* Q *и ее индекс вычисляется по правилу*

$$\mathrm{ind}\,(\infty, I - A; Q) = \begin{cases} (-1)^{\beta(B|_{L_\infty})}, & \text{если } f_*(\omega(\xi u_*, 0)) < 0 \text{ при больших } \xi > 0, \\ 0, & \text{если } f_*(\omega(\xi u_*, 0)) > 0 \text{ при больших } \xi > 0. \end{cases}$$

где $\beta(B|_{L_\infty})$ — *сумма кратностей собственных значений сужения* $B|_{L_\infty}$ *оператора* B *на подпространство* L_∞, *больших единицы.*

Условия 1–3 наиболее просто проверяются для операторов вида $Ax = Bx + Cx + Dx$, где B — линейный вполне непрерывный оператор, имеющий простой собственный вектор, отвечающий собственному значению 1; C — вполне непрерывный однородный с показателем однородности $k < 1$ оператор; D — вполне непрерывный оператор, удовлетворяющий условию $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|Dx\| \cdot \|x\|^{-k} = 0$.

Литература

1. *Гуминская А.В., Забрейко П.П.* О вычислении относительного индекса особой точки в невырожденном случае // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 1. С. 4–9.

2. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.