# МЕТОД ОПЕРАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ И ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

**Е.А. Аршава**

Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры
elarshava@mail.ru

Настоящее исследование опирается на метод [1] операторных тождеств, который Л.А.Сахнович использовал для изучения класса уравнений вида

$$Sf = \frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty S(x-t)f(t)dt = \varphi(x), \tag{1}$$

который является наиболее общим классом уравнений с разностным ядром. Основная идея метода состоит в доказательстве конечномерности соответствующего интегрального оператора. В этом случае обратный оператор к данному интегральному оператору строится при помощи функций, которые определяют вырожденность коммутационного оператора.

Целью исследования является изучение задачи обращения оператора вида

$$Sf = L_x(\alpha)\int\limits_0^\infty S(x,t)f(t)dt, \tag{2}$$

с ядром $S(x,t)$, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$(L_x(\alpha) - L_t(\alpha))S(x,t) = 0, \quad L_x(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}, \quad \alpha = \overline{\alpha} \neq 0. \tag{3}$$

Можно доказать, что для любого ограниченного оператора вида (2) с ядром, которое удовлетворяет условиям (3), имеет место соотношения:

$$(A_0S - SA_0^*)f = \int\limits_0^\infty \left(M_1(x) + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}M_2(x) + M_3(t) + \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}M_4(t)\right)f(t)dt,$$

где $A_0 = L_x^{-1}(\alpha), \quad M_1(x) = S(x,0), \quad M_2(x) = S'(x,0), \quad M_3(t) = -S(0,t),$
$M_4(t) = -S'(0,t), \quad f(t) \in L_2(0,\omega).$

Если оператор $S$ имеет ограниченный обратный $T$, тогда верно представление:

$$(TA_0 - A_0^*T)f = \int\limits_0^\infty R(x,t)f(t)dt,$$

где $R(x,t) = \sum_{i=1}^4 P_i^*(t)Q_i(x)$, кроме того, для $P_i(t)Q_i(x)$, $(i = \overline{1,4})$ выполняются соотношения вида:

$$S^*P_1 = 1, \quad S^*P_2 = M_3^*(t), \quad S^*P_3 = M_4^*(t), \quad S^*P_4 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha},$$

$$SQ_1 = M_1(x), \quad SQ_2 = 1, SQ_3 = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha}, \quad SQ_4 = M_2(x). \tag{4}$$

Если оператор $S$ ограничен вместе со своим обратным и существуют функции $P_i(t)Q_i(x)$, $(i = \overline{1,4})$, которые удовлетворяют соотношениям (4), тогда для оператора $T = S^{-1}$ имеет место интегральное представление:

$$Tf = L_x(\alpha) \int\limits_0^\infty f(t) L_t(-\alpha) \Phi(x,t) dt,$$

где $\Phi(x,t)$ выражается через ядро оператора $R = (TA_0 - A_0^* T)$, $f(t) \in L_2(0,\omega)$.

Полученные результаты перенесены на случай обобщенных функций вида:

$f(x) = \gamma\delta(x) + \beta\delta(\omega - x) + g(x)$, $g(x) \in L_2(0,\omega)$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

В качестве примера рассмотрим интегральный оператор

$$SG = \int\limits_0^\omega K(x,t) G(x,\tau) dt, \tag{5}$$

где $K(x,t) = g(x-t)e^{-\alpha(x+t)/2} + f(x+t)$ – корреляционная функция случайного входного процесса, $\tau$ – фиксированный параметр. Интегральные операторы такого вида встречаются при решении задачи фильтрации нестационарного случайного сигнала на конечном интервале [2].

**Литература**


1. *Сахнович Л.А.* Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, вып. 4 (214). С. 69–129.

2. *Пугачев B.C.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: ГТТИ, 1957.