ДРОБНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ АДАМАРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

С.А. Шлапаков

Витебский государственный университет им П.М. Машерова,

Московский пр-т 33, 210038 Витебск, Беларусь

geom@vsu.by

Дробное интегродифференцирование Ж. Адамара является дробной степенью $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^{\alpha}$ оператора $x\dfrac{d}{dx}$.

На конечном отрезке $[a,b]$ действительной полуоси рассматривается интегральный оператор

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{f(t)}{\left(\ln\dfrac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad \alpha>0,\quad 0<a<x. \tag{1}$$

в пространстве

$$X^p_c=\left\{f(t)\,\middle|\,\int\limits_a^b|t^cf(t)|^p\,\frac{dt}{t}<+\infty,\quad c\in\mathbb{R},\quad 1\leqslant p<\infty\right\} \tag{2}$$

с нормой

$$\|f\|_{X^p_c}=\left(\int\limits_a^b|t^cf(t)|^p\,\frac{dt}{t}\right)^{1/p},$$

$\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Пространство X^p_c является банаховым ввиду изометрии

$$\|f\|_{X^p_c}=\|t^{c-1/p}f\|_{L_p}.$$

Доказывается, что оператор (1) ограниченно действует в пространстве (2) :

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}:X^p_c\longrightarrow X^p_c,$$

причем $\|\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}f\|_{X_c^p} \leqslant A_\alpha\|f\|_{X_c^p}$, где $A_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{b/a} t^{c-1}(\ln t)^{\alpha-1}dt$.

При этом, если постоянная $A_\alpha < 1$, то оператор $T = I - \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}$, где I — тождественный оператор в X_c^p, является обратимым.

Это позволяет рассматривать интегральные уравнения дробного порядка с оператором T в пространстве (2), исследуя при этом вопросы их разрешимости.

Литература

1. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебник. Мн.: БГУ, 2006. 430 с.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника, 1987. 688 с.