

О СКОРОСТИ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В.Н.Русак¹, А.Х. Уазиз²

¹ Белгосуниверситет, физический факультет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
rusak@bsu.by

² Белорусский государственный педагогический университет, математический факультет
Советская 18, 220050 Минск, Беларусь

Функции, определяемые параметрическими интегралами с ядром Коши, были объектом пристального внимания в теории аппроксимации аналитических функций в комплексных областях. С другой стороны, сингулярные интегралы и их полиномиальные аппроксимации исследовались также и на отрезках сингулярности.

Будем рассматривать сингулярные интегралы

$$F(x) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1],$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, где $f(t)$, как обычно принадлежит к Lip_M^α , $0 < \alpha \leq 1$, и исследовать равномерную рациональную аппроксимацию этих функций на интервале $(-1, 1)$.

Если предположить, что $f(t)$ аппроксимируется рациональной функцией $r_n(t)$ порядка не выше n , то сингулярный интеграл

$$R_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{r_n(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1],$$

есть также рациональная функция порядка не выше n , и естественно возникает вопрос, как получить в равномерной метрике оценку для уклонения $\|F(x) - R_n(x)\|$.

В качестве плотности $f(t)$ будем брать дробные интегралы Римана — Лиувилля

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} h(t) dt, \quad r > 0, \quad (1)$$

где $h(t)$ функция ограниченной вариации. Точный порядок убывания наилучших равномерных рациональных приближений функций (1) был найден при целых r В.А. Поповым, при дробных $r > 0$ — А.П. Старовойтовым.

Теорема 1. *Если плотность $f(x)$ задается равенством (1), где $h(t)$ функция ограниченной вариации, то существует рациональная функция $r_n(x)$ порядка не выше n и такая, что*

$$\|F(x) - R_n(x)\| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right).$$

Заметим в заключение, что полиномиальная и рациональная аппроксимация сингулярных интегралов ранее изучалась в [1, 2].

Литература

1. Русак В.Н., Шешко М.А. О приближении сингулярных интегралов сингулярными интегралами с полиномиальной плотностью // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979 № 1. С. 42-50.
2. Русак В.Н. Равномерная рациональная аппроксимация сингулярных интегралов // Весці НАН Беларусі Серыя фіз.-мат. навук. 1993. № 2. С. 22-26.