О ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

М.К. Потапов

МГУ, Москва

В работе показано, что прямые и обратные теоремы о приближении непериодических дифференцируемых функций алгебраическими многочленами аналогичны соответсвующим теоремам для периодических функций при приближении их тригонометрическими полиномами, если операцию дифференцирования заменить операцией применения оператора дифференцирования Якоби, а обычный модуль гладкости заменить обобщенным модулем гладкости Якоби.

Обозначим:

$L_{p,\alpha}$-множество функций, измеримых при $p \in [1;\infty)$ и непрерывных при $p = \infty$ и таких, что $\|f\|_{p,\alpha} < \infty$, где

$$\|f\|_{p,\alpha} = \begin{cases} \left(\int_{-1}^{1} |f(x)(1-x^2)^{\alpha}|^p\right)^{1/p} & \text{при } p \in [1;\infty), \\ \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x)(1-x^2)^{\alpha}| & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

$E_n(f)_{p,\alpha}$ - наилучшее приближение $f(x)$ алгебраическими многочленами $P_n(x)$ степени не больше, чем n, т.е. $E_n(f)_{p,\alpha} = \inf\limits_{P_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha}$.

Оператор дифференцирования Якоби: $D_{uv} = (1-u^2)^{-v}\frac{d}{du}(1-u^2)^{v+1}\frac{d}{du}$.

Оператор обобщенного сдвига Якоби:

$$T_t(f,x,v) = \frac{1}{\gamma(v)}\int\limits_{-1}^{1} f(x\cos t + y\sqrt{1-x^2}\sin t)(1-y^2)^{v-\frac{1}{2}}dy,$$

где $\gamma(v) = \int_{-1}^{1}(1-y^2)^{v-\frac{1}{2}}dy$.

$$\Delta_t^1(f,x,v) = T_t(f,x,v) - f(x), \Delta_{t_1,..,t_k}^k(f,x,v) = \Delta_{t_1}^1(\Delta_{t_2,..,t_k}^{k-1}(f,x,v),x,v).$$

K-ый обобщенный модуль гладкости Якоби:

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta,v)_{p,\alpha} = \sup_{|t_i|<\delta, i=1,..,k} \|\Delta_{t_1,..,t_k}^k(f,x,v)\|_{p,\alpha}.$$

Теорема 1. *Пусть* $k \in \mathbf{N}, r \in \mathbf{N}, -\frac{1}{2} < \alpha \leqslant v$ *при* $p = 1$; $-\frac{1}{2p} < \alpha < v + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ *при* $1 < p < \infty$; $0 \leqslant \alpha < v + \frac{1}{2}$ *при* $p = \infty$ *и* $f \in L_{p,\alpha}$. *Тогда*

а) если f *имеет в интервале (-1;1) все призводные до порядка* $2r$ *и* $D_{xv}^r(f) \in L_{p,\alpha}$, *то*

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leqslant C_1 n^{-2r} \tilde{\omega}_k(D_{xv}^r(f), \frac{1}{n}, v)_{p,\alpha};$$

б) если $\sum_{s=1}^{\infty} s^{2r-1}E_s(f)_{p,\alpha} < \infty$, *то* f *имеет в интервале (-1;1) все призводные до порядка* $2r$, $D_{xv}^r(f) \in L_{p,\alpha}$ *и*

$$\tilde{\omega}_k(D_{xv}^r(f), \frac{1}{n}, v)_{p,\alpha} \leqslant C_2\left(n^{-2k}\sum_{s=1}^{n} s^{2k+2r-1}E_s(f)_{p,\alpha} + \sum_{s=n+1}^{\infty} s^{2r-1}E_s(f)_{p,\alpha}\right),$$

где C_1 *и* C_2 *— постоянные, не зависящие от* f *и* $n \in \mathbf{N}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 08.01.00302) и программы поддержки ведущих научных школ (проект N НШ-2787-2008.1).