РАВНОМЕРНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА СМИРНОВА – СОБОЛЕВА E_1^1

А.А. Пекарский

Белорусский государственный технологический университет,

Свердлова 13а, 220630, Минск, Беларусь

pekarskii@gmail.com

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – односвязная ограниченная область, граница которой ∂G является замкнутой спрямляемой кривой Жордана. Через $C_A = C_A(\overline{G})$ обозначим множество функций f, аналитических в G и допускающих непрерывное продолжение в $\overline{G} = G \cup \partial G$. Будем рассматривать C_A как банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{C_A} = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Через $R_n(f)$ обозначим наилучшее приближение $f \in C_A$ посредством рациональных функций степени не выше n. Согласно теореме Уолша $R_n(f) = o(1)$ при $n \to \infty$.

Пусть $E_1 = E_1(G)$ — пространство В.И. Смирнова [1] функций f, аналитических в G и наделенных нормой

$$\|f\|_{E_1} = \int_{\partial G} |f(\xi)||d\xi|.$$

Здесь $f(\xi)$ для $\xi \in \partial G$ есть предельное значение $f(z)$, когда $z \in G$ стремится к ξ по некасательным по отношению к ∂G путям. Через $E_1^1 = E_1^1(G)$ обозначим пространство Смирнова – Соболева функций f, аналитических в G и таких, что $f' \in E_1$. Хорошо известно вложение $E_1^1 \subset C_A$.

Если G является областью С.Я. Альпера или Радона и $f \in E_1^1$, то [2]

$$R_n(f) \leqslant \frac{c(G)}{n}\|f'\|_{E_1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Нами построены примеры, показывающие, что ограничение на ∂G в последнем неравенстве нельзя существенно ослабить. Пусть функция ω непрерывна и выпукла на $[0,1]$, $\omega(0) = 0$, $\omega(x) > 0$ при $x \in (0,1]$ и $\omega(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Введем область

$$G_\omega = \{x + iy : |x| < 1, |y| < \omega(1) \text{ и } |y| > \omega(x) \text{ при } x \in [0,1)\}$$

Теорема 1. *Существует функция* $g \in E_1^1(\overline{G}_\omega)$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} nR_n(g) = +\infty.$$

Литература

1. *Duren P.* Theory of H^p Spaces. Academic Press. N.-Y., 1970

2. *Пекарский А.А.* Рациональные приближения функций с производными из пространства В.И. Смирнова // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13(2). С. 165–190.