РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЛИУВИЛЛЯ

Н.В. Жуковская, А.А. Килбас

Белгосуниверситет, механико-математический факультет.

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

anatolykilbas@gmail.com

Пусть $D_{-}^{\alpha}y$ - дробная производная Лиувилля порядка $\alpha > 0$ [1, § 5.1]:

$$\left(D_{-}^{\alpha}y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (\alpha > 0,\, x > 0),$$

где $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ означает целую часть $\alpha > 0$.

Рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k x^{\alpha+k} \left(D_-^{\alpha+k} y\right)(x) = f(x) \quad (x > 0; \;\; n \in \mathbb{N}; \; B_{n-1} \neq 0) \tag{1}$$

с комплексными $B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathbb{C}$ на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Применяя прямое и обратное преобразования Меллина к обеим частям уравнения (1), получаем его решение в виде

$$y(x) = \int_x^\infty G\left(\frac{x}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t}, \tag{2}$$

где

$$G(x) = \left(\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\Gamma(s)}{(B_0 + B_1(s+\alpha) + \ldots + B_{n-1}(s+\alpha)\ldots(s+\alpha+n-2))\Gamma(s+\alpha)}\right]\right)(x), \tag{3}$$

где $\mathcal{M}^{-1}g$ - обратное преобразование Меллина функции g:

$$\left(\mathcal{M}^{-1}g\right)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} g(s) x^{-s} ds \quad (\gamma = \mathrm{Re}(s) \in \mathbb{R}).$$

Рассматривается случай, когда полюсы $s_n = -n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ гамма-функции $\Gamma(s)$ и полюсы $s = s_1$, $s = s_2, \ldots, s = s_{n-1}$ знаменателя в (3) не совпадают. С помощью теории вычетов дается выражение $G(x)$ в терминах обобщенной функции Райта [2, § 1.11] и обобщенной гипергеометрической функции [2, § 1.6].

Теорема. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathbb{C}$ $(B_{n-1} \neq 0)$, *и пусть корни* $s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_{n-1}$ *такие, что* $s_1 \neq s_2 \neq \ldots \neq s_{n-1} \neq -k$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$G(x) = \frac{1}{B_{n-1}} \, {}_{n-1}\Psi_n \left[\begin{matrix} (-s_1, -1), \ldots, (-s_{n-1}, -1) \\ (\alpha, -1), (-s_1 + 1, -1), \ldots, (-s_{n-1} + 1, -1) \end{matrix} \Bigg| -x \right] +$$

$$+ \frac{1}{B_{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(s_k) x^{-s_k}}{\prod_{j=1, j\neq k}^{n-1} (s_k - s_j) \Gamma(s_k + \alpha)} = \frac{(-1)^{n-1}}{B_{n-1} s_1 \ldots s_{n-1} \Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \, {}_nF_{n-1} \left[\begin{matrix} 1 - \alpha, s_1, \ldots, s_{n-1} \\ s_1 + 1, \ldots, s_{n-1} + 1 \end{matrix} \Bigg| \, x \right] + \frac{1}{B_{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(s_k) x^{-s_k}}{\prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} (s_k - s_j) \Gamma(s_k + \alpha)}.$$

Частное решение $y(x)$ уравнения (1) задается (2) при условии, что интеграл в правой части (2) сходится.

Работа выполнена в рамках проекта "Обобщенные гипергеометрические функции и приложения в математике и механике", входящей в Государственную программу "Математические модели", и при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф08МС-018).

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

2. *Kilbas A.A, Srivastava H.M. and Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Amsterdam, etc., Elsevier, 2006