СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Д.В. Леоненко

Белорусский государственный университет транспорта
Кирова 34, 246653 Гомель, Беларусь
leoden@tut.by

Введение. Свободные и вынужденные колебания круговых трехслойных пластин, не скрепленных с упругим основанием, исследованы в работе [1]. Здесь рассматриваются свободные осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластинки круглой формы на упругом основании.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, ϕ, z. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты ϕ: $q = q(r,t)$. Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого (не работающего в тангенциальном направлении) заполнителя $(h_3 = 2c)$ справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты ϕ, то есть $u(r,t)$, $\psi(r,t)$, $w(r,t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Через h_k и ρ_k обозначены толщина и плотность материала k-го слоя.

Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w,$$

где κ_0 — коэффициент жесткости упругого основания. Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая свободные поперечные колебания круглой трехслойной пластинки без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Лагранжа с учетом сил инерции:

$$L_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w_{,r}) = 0, \quad L_2(a_2 u + a_4\psi - a_5 w_{,r}) = 0,$$

$$L_3(a_3 u + a_5\psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w - M_0 \ddot{w} = 0\,.$$

Здесь $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$, коэффициенты a_i выражаются через геометрические и прочностные характеристики материалов слоев; дифференциальные операторы L_2, L_3.

Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r,t) = v(r)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)),$$

где $v(r)$ — координатная функция.

Функцию $v(r)$ определяем по формуле

$$v(\lambda r) = C_5 J_0(\lambda r) + C_6 I_0(\lambda r) + C_7 Y_0(\lambda r) + C_8 K_0(\lambda r),$$

где J_0, Y_0 — функции Бесселя нулевого порядка (нижний индекс) первого и второго рода (функция Неймана), соответственно; I_0, K_0 — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков; $C_5, \ldots, C_8$ — константы интегрирования.

Подставляя граничные условия (жесткое защемление и шарнирное опирание), получим выражения для определения серии собственных частот λ_n.

Было проведено численное исследование зависимостей частот собственных колебаний системы "пластина-основание" от жесткости упругого основания и от толщин слоев при различных условиях закрепления кромок пластины.

Литература

1. *Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В.* Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. Гомель: БелГУТ, 2003. 367 с.