СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ ГУРСА И ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДВУМЕРНОГО ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.В. Мотевич, Ф.Е. Ломовцев

Белгосуниверситет, механико-математический факультет

пр. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

lomovcev@bsu.by

Теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений смешанной задачи для гиперболических уравнений с условиями Гурса и не зависящими от двумерного времени граничными условиями доказаны в [1] и с условиями Коши и зависящими от одномерного времени граничными условиями – в [2].

В области $G =]0,l[\times\Im$ пременных x и $t = \{t_1, t_2\}$ изучается гиперболическое уравнение

$$u_{t_1t_2} + a_1(t)\widetilde{a}(x)u_{xt_1} + a_2(t)\widetilde{a}(x)u_{xt_2} - u_{xx} + b_1(x,t)u_{t_1} + b_2(x,t)u_{t_2} + b_0(x,t)u_x + d_0(x,t)u = f \quad (1)$$

при зависящих от t граничных условиях

$$u(0,t) = 0, \ u_x(l,t) + \beta(t)u(l,t) = 0, \quad t = \{t_1, t_2\} \in \Im =]0,T_1[\times]0,T_2[, \qquad (2)$$

и условиях Гурса

$$u(x,t_1,0) = \varphi_1(x,t_1), \quad t_1 \in]0,T_1[, \quad u(x,0,t_2) = \varphi_2(x,t_2), \quad t_2 \in]0,T_2[,$$

$$\varphi_1(x,0) = \varphi_2(x,0), \quad x \in]0,l[. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Если коэффициенты* $a_i(t) \in C(\overline{\Im})$, $i = 1,2$, $\widetilde{a}(x) \in C^{(1)}[0.l]$, $\widetilde{a}(l) = 0$, $b_j(x,t)$, $d_0(x,t) \in C(\overline{G})$, $j = \overline{0,2}$, $\beta(t) \in C^{(2)}(\overline{\Im})$, $\beta(t) \geqslant 0$, $t \in \overline{\Im}$, *то* $\forall f(x,t) \in L_{2,\gamma(t)}(G)$, $\gamma(t) = (T_2 - t_2)(T_1 - t_1)$, $\forall \varphi_i(x,t_i) \in W^1_{2,i}(]0,l[\times]0,T_i[)$, $i = 1,2$, *существуют единственные сильные решения* $u \in \mathcal{E}(G)$ *смешанной задачи (1)-(3), удовлетворяющие оценке*

$$\|u\|^2_{\mathcal{E}(G)} \leqslant c_1 \left[\int\limits_G \gamma(t)\,|f(x,t)|^2\,dx\,dt + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^{T_i} \left(\int\limits_0^l |\varphi_{i,t_i}|^2\,dx + \left\|A^{1/2}(t)\varphi_i\right\|^2 \right)\Bigg|_{t_j=0} dt_i \right], \ c_1 > 0,$$

где $j \neq i$ *и гильбертовы пространства* $W^1_{2,i}(]0,l[\times]0,T_i[)$ — *замыкания множеств* $\{v \in \mathcal{D}(G) : v(x,t)|_{t_j=0} = 0\}$, $j \neq i$, *по нормам-квадратному корню интегралов по* $]0,T_i[$ *этой оценки.*

Доказательство теоремы 1 состоит в проверке предположений полученных ранее авторами теорем существования, единственности и устойчивости сильных решений абстрактной задачи Гурса для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторных коэффициентов.

Гильбертово пространство $\mathcal{E}(G)$ — замыкание $\mathcal{D}(G) = \{u \in W^2_2(G) : u \in (2)\}$ по норме

$$\|u\|_{\mathcal{E}(G)} = \left[\int\limits_{\Im} \sum_{i=1}^{2} (T_i - t_i) \left(\int\limits_0^l |u_{t_i}(x,t)|^2\,dx + \left\|A^{1/2}(t)u(x,t)\right\|^2 \right) dt \right]^{1/2},$$

$$\left\|A^{1/2}(t)u(x.t)\right\|^2 = \frac{l}{1 + l\beta(t)}\,|u_x(l.t)|^2 + \frac{\beta(t)}{1 + l\beta(t)}\,|u(l,t)|^2 + \int\limits_0^l |u_x(x,t)|^2\,dx.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф07К-016).

Литература

1. *Юрчук Н.И.* Частично характеристическая смешанная задача с начальными условиями Гурса для линейных уравнений с двумерным временем // Дифференц уравнения 1969 Т. 5, № 5 С 898-910.

2. *Ломовцев Ф.Е.* О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнениях второго порядка с переменной областью определения операторных коэфициентов // Дифференц уравнения. 1992 Т. 28, № 5. С. 873-885.