СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М.В. Мисник

Гродненский государственный аграрный университет, Терешковой 28, 230000 Гродно, Беларусь
misnikmv@mail.ru

Рассмотрим уравнение вида

$$u_{xxtt} = 3uu_{xxt} + 6u_t u_{xt} + 3u_x u_{tt} - 6uu_t^2 - 3u^2 u_{tt} + g, \tag{1}$$

где $g = Auu_{xx} + Buu_{xt} + Cuu_{tt} + Du_x^2 + Eu_xu_t + Fu_t^2 + Guu_x + Huu_t + Ku^2 + \; + Lu_{xxx} + Pu_{xxt} + {} + Mu_{ttt} + Nu_{xx} + Yu_{xt} + Ru_{tt} + Su_x + Tu_t + Vu + Z$, коэффициенты которого есть некоторые функции от x, t. В (1) можно было бы дописать слагаемое Qu_{xtt} веса меньшего 5, однако с помощью преобразования $u = f_x v, v = v(\xi, t), \xi = f(x,t)$, $f_{xx} = \frac{1}{3}Qf_x$ коэффициент при $u_{\xi tt}$ можем сделать равным нулю.

Для (1) найдем условия наличия свойства Пенлеве, то есть условия, при которых все подвижные особенности являются лишь полярными.

Для уравнения (1) упрощенным является уравнение

$$u_{xxtt} = 3uu_{xxt} + 6u_tu_{xt} + 3u_xu_{tt} - 6uu_t^2 - 3u^2u_{tt}, \tag{2}$$

имеющее свойство Пенлеве, так как из (2) интегрированием получим $u_{xx} = 3u_xu - u^3 + w$, $w_{tt} = 0$. Если представить решение уравнения (2) в виде

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\varphi^{k-1}, \tag{3}$$

где $\varphi = \varphi(x,t)$, $\varphi_x = 1$, то найдем $u_0 = -1$, при этом резонансные коэффициенты u_1, u_3, u_4 и функция φ_t будут произвольными функциями от t.

Требуя, чтобы в полном уравнении (1) с решением вида (3) функция φ_t и резонансные коэффициенты u_1, u_3, u_4 были также произвольными функциями от t, получим следующие условия:

$$A = B = C = D = E = F = G = N = L = P = M = H = Y = K = S = 0,$$

$$R_x = 0, \quad T = 2R_t, \quad V = R_{tt}. \tag{4}$$

Обозначим $R = a = a(t)$, $Z = c = c(x,t)$, тогда, учитывая условия (4), уравнение (1) примет вид

$$u_{xxtt} = 3uu_{xxt} + 6u_tu_{xt} + 3u_xu_{tt} - 6uu_t^2 - 3u^2u_{tt} + au_{tt} + 2a_tu_t + a_{tt}u + c, \tag{5}$$

имеющее свойство Пенлеве, так как из (5) интегрированием получим: $u_{xx} = 3u_xu - u^3 + au + b$, $b_{tt} = c$.

Значит, верна

Теорема 1. *Условия (4) являются необходимыми и достаточными для наличия свойства Пенлеве у решения уравнения (1).*