О РАЗРУШЕНИИ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ ВСЕХ НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Л. Гладков

Витебский госуниверситет им. П.М. Машерова, Московский пр-т 33, 210038 Витебск, Беларусь
gladkoval@mail.ru

Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - c(x,t)u^p & \text{for } x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,t) = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy & \text{for } x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{for } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $p > 0$, $l > 0$, $c(x,t)$ — неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \overline{\Omega}$ и $t \geqslant 0$, $k(x,y,t)$ — неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ и $t \geqslant 0$ и $u_0(x)$ — нетривиальная неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая граничному условию при $t = 0$. Для этой задачи изучаются условия при которых все нетривиальные решения разрушаются за конечное время. Получены результаты для раличных соотношений между p и l. В частности, для $p = 1$, и $l > 1$ установлено следующее. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \text{ in } \Omega \text{ with } \varphi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Обозначим первое собственное значение этой задачи через λ_1, а соответствующую ему собственную функцию φ выберем таким образом, чтобы $\int_\Omega \varphi(x)\,dx = 1$. Предположим, что

$$c(x,t) \geqslant \underline{c} \text{ for } x \in \Omega \text{ and } t > 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_\Omega k(x,y,t)\,dy \leqslant A\exp(\sigma t) \text{ for } x \in \partial\Omega \text{ and } t > 0, \tag{4}$$

где $\underline{c} \geqslant 0$, $A > 0$, $\sigma < (\lambda_1 + \underline{c})(l-1)$, или

$$c(x,t) \leqslant \overline{c} \text{ for } x \in \Omega \text{ and } t > 0, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^\infty \underline{k}(t)\exp[-(\lambda_1 + \overline{c})(l-1)t]\,dt = \infty, \tag{6}$$

где $\overline{c} \geqslant 0$, $\underline{k}(t) = \inf\limits_{\partial\Omega\times\Omega} k(x,y,t)$.

Теорема 1. *Пусть $p = 1$, $l > 1$. Если справедливы условия (3), (4), то существуют глобальные решения задачи (1) с достаточно малыми начальными условиями. При выполнении условий (5), (6) любое нетривиальное решение существует лишь конечное время.*

Отметим, что в (4) нельзя положить $\sigma = (\lambda_1 + \underline{c})(l-1)$.