

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ

**Н.Г. Абрашина-Жадаева, Н.С. Романова**

Белгосуниверситет, физический факультет

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

zhadaeva@bsu.edu.by, natalaromanova@yahoo.com

Дробные производные известны достаточно давно [1], как и производные целых порядков. Но недавно они нашли новые применения в физике, гидрологии и финансах (см. цитируемые работы в [2]). Аналитическое решение дифференциальных уравнений в частных производных дробных порядков, видимо, возможно только в некоторых специальных случаях. В [2], [3] показано, что решение многих "дробных" дифференциальных уравнений основывается на численных методах, которые являются аналогами для их решения в случае производных целого порядка. Численное решение дробных дифференциальных уравнений требует численной оценки дробной производной. В одномерном случае эта оценка называется формулой Грюнвальда – Летникова [1]. В [3] эти результаты расширены для векторно-дробных производных.

Рассматривается в прямоугольной области задача Дирихле для двумерного "дробного" уравнения диффузии. Используется для аппроксимации смещенная версия классической формулы Грюнвальда – Летникова

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x_1^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{h_1^\alpha} \sum_{k=0}^{N_1} \frac{\Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(k + 1)} \cdot u(x_1 - (k - 1)h_1, x_2, t),$$

где  $\Gamma(\circ)$  – гамма функция. Определяется конечно-разностный оператор следующим образом

$$A_1 y_{ij}^n = \frac{c_{ij}^1}{h_1^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k + 1)} y_{i-k+1,j},$$

что соответствует аппроксимации порядка  $O(h_1)$   $\alpha$ -дробной частной производной,  $\alpha > 0$ .

В качестве численного решения обсуждаются метод приближенной факторизации и векторно-аддитивный метод [4]. Доказана следующая в [2, 5]

**Теорема.** Пусть операторы  $(E - \frac{\tau}{2} A_1)$  и  $(E - \frac{\tau}{2} A_2)$  коммутативны. Тогда метод факторизации безусловно устойчив для всех  $1 < \alpha, \beta < 2$  и сходится со скоростью  $O(\tau^2 + h_1 + h_2)$ .

Теорема верна для векторно-аддитивных схем для данного класса задач без требования коммутативности операторов расщепления [6].

## Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения М.: Наука и техника. 1987.
2. Abrashina-Zhadaeva N.G., Romanova N.S. A splitting type algorithm for numerical solution of PDES of fractional order // Mathematical Modelling and analysis. 2007. V. 12. № 4. P. 399–408.
3. Meerschaert M.M., C. Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // J. computat. appl. math. 2004. V. 172. № 1. P. 65–77.
4. Абрашина-Жадаева Н.Г., Романова Н.С. Многокомпонентные схемы векторного расщепления для решения многомерных задач математической физики // Дифференц. уравнения. Т. 42. № 7. С. 883–894.
5. Abrashina-Zhadaeva N.G., Romanova N.S. Numerical decomposition method for the dimensional fractional diffusion equation // Теория функций и вычислительные методы. Астана. 2007. С. 8–12.
6. Abrashina-Zhadaeva N.G., Romanova N.S. Vector Additive Decomposition for 2D Fractional Diffusion Equation // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2008. V. 13. № XX. P. 1–7.