ИЗОХРОННОСТЬ ОБРАТИМЫХ СИСТЕМ С ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ 4-Й СТЕПЕНИ

А.Е. Руденок

Белгосуниверситет, механико-математический факультет

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

В работе изучаются условия изохронности центра в особой точке $O(0,0)$ системы

$$dx/dt = -y + p_n(x,y), \quad dy/dt = x + q_n(x,y), \tag{1}$$

где $p_n(x,y), q_n(x,y)$ — однородные многочлены n- ой степени. Полное решение проблемы изохронности центра системы (1) в случае $n = 5$ получено в [1]. Достаточные условия изохронности центра системы (1) в случае $n = 4$ получены в работе [2] и других. В данной работе получены необходимые и достаточные условия изохронности системы (1) в случае $n = 4$ при условии ее обратимости.

Система (1) в полярной системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ имеет вид

$$dr/dt = r^n P(\varphi), \quad d\varphi/dt = 1 - r^{n-1}Q(\varphi). \tag{2}$$

Если $n = 4$ и система (1) обратимая, то преобразованием поворота $\varphi \to \varphi + \alpha$ ее можно свести к системе (2), где

$$P = B\sin\varphi + D\,\sin 3\,\varphi - m\sin 5\,\varphi, Q = a\,\cos\,\varphi + c\,\cos\,3\,\varphi + m\,\cos\,5\,\varphi, \tag{3}$$

$\mathrm{a, c, m, B, D}$ - некоторые постоянные.

Теорема 1. *Для того чтобы обратимая система (1) с* $n = 4$ *была изохронной в особой точке* $O(0,0)$, *необходимо и достаточно, чтобы с точностью преобразований поворота* $\varphi \to \varphi + \alpha$ *и растяжения* $r \to kr$ *ее можно было свести к одной из систем (2), (3), где*

(a) $P = B\sin\varphi + D\sin 3\varphi$, $Q = 0$,

(b) $P = B\sin\varphi + D\sin 3\varphi$, $Q = 3B\cos\varphi + D\cos 3\varphi$,

(c) $P = \sin\varphi + \sin 3\varphi$, $Q = \cos\varphi - \cos 3\varphi$,

(d) $P = 7/3\sin\varphi + \sin 3\varphi$, $Q = \cos\varphi + 3\cos 3\varphi$,

(e) $P = -13/3\sin\varphi + \sin 3\varphi$, $Q = -\cos\varphi - 3\cos 3\varphi$,

(f) $P = 7/3\sin\varphi + \sin 3\varphi$, $Q = 3\cos\varphi - 3\cos 3\varphi$,

(g) $P = 133/60\sin\varphi + 16/15\sin 3\varphi - \sin 5\varphi$, $Q = 1/4\cos\varphi + \cos 5\varphi$,

(h) $P = (c^2 - 2c + 133)/60\sin\varphi + (c+16)/15\sin 3\varphi - \sin 5\varphi$, $Q = (c^2 - 2c + 5)/20\cos\varphi +$ $+ 3/5\,c\cos 3\varphi + \cos 5\varphi$,

(i) $P = -34/15\sin\varphi + \sin 3\varphi - \sin 5\varphi$, $Q = -2/5\cos\varphi - 3/5\cos 3\varphi + \cos 5\varphi$,

(k) $P = -6/5\sin\varphi - 17/15\sin 3\varphi - \sin 5\varphi$, $Q = -2/5\cos\varphi - 3/5\cos 3\varphi + \cos 5\varphi$.

Литература

1. *Romanovski V. G., Chen H., Hu Z.* // J. Phys. A. V. 40. № 22. 2007. P.5905-5919.
2. *Chavarriga J., Garsia A., Gine J.* // Bull. Sci. Math. V 123. 1999. P. 77-96.