СТЕПЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ИЕРАРХИИ (K_{II})

М.С. Нелепко

Белгосуниверситет, механико-математический факультет

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

Marina_bobaren@tut.by

Рассматривается иерархия дифференциальных уравнений (K_{II}) [1]

$$(D+w)\,H_n\left[w'-\frac{1}{2}w^2\right]=z\,w+\beta, \tag{1}$$

где $D=d/dz$, H_n — дифференциальный линейный оператор, задаваемый соотношением

$$H_{n+2}=J\Theta H_n, \quad H_0[u]=1, \quad H_1[u]=u''+4u^2,$$

$$J=D^3+3(uD+Du)+2(D^2uD^{-1}+D^{-1}uD^2)+8(u^2D^{-1}+D^{-1}u^2). \quad \Theta=D^3+2uD+u_z. \tag{2}$$

Теорема 1. *Для $n\in\mathbb{N}$ справедливы следующие соотношения:*

1) $S(H_n[w'-w^2/2])\subset\{(-\tau+i+1,i+1);\ i=0,2,\dots,\tau-1\}$, $\tau=3n$, *если n — четное,* $\tau=3n+1$, *если n — нечетное;*

2) $S((D+w)\,H_n[w'-\frac{1}{2}w^2])=\{(-\tau+i,i+1);\ i=0,1,\dots,\tau\}$;

3) $(D+w)\,H_n[w'-\frac{1}{2}w^2]=w^{(\tau)}+\sum_{i=2}^{\tau}\sum_{h_j}C_{h_0,h_1,\dots,h_n}w^{h_0}(w')^{h_1}\dots(w^{(\tau-1)})^{h_{\tau-1}}+\rho_n\,w^{\tau+1}$, *где внутренняя сумма берется по $h_j\geqslant 0$, таким что $\sum_{j=0}^{\tau-1}h_j=i$, $\sum_{j=0}^{\tau-1}jh_j=-\tau-1+i$,* $\rho_n=\left(-\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{2}{n!!}\prod_{j=1}^{n/2-1}\frac{(6j+1)(3j+2)}{3j+1}$, *если n — четное,* $\rho_n=\left(-\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{(n-1)!!}\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(6j-1)(3j+1)}{3j+2}$, *если n — нечетное.*

В работе находятся все степенные разложения решений уравнения (1). Для этого используется метод многоугольников Ньютона, развитый А. Д. Брюно [2].

Теорема 2. *Для уравнения (1), $\beta\neq 0$, существуют следующие степенные разложения решений:*

1) τ *— параметрическое семейство голоморфных в нуле разложений*

$$w=\sum_{i=0}^{\tau-1}c_i\,z^i+\sum_{s=\tau}^{\infty}a_s\,z^s; \tag{3}$$

2) *разложение в окрестности $z=\infty$*

$$w=-\beta z^{-1}+a_1\,z^{-\tau-2}+z^{-1}\sum_{s=2}^{\infty}a_s\,z^{-(\tau+1)\,s};$$

3) τ *разложений вида*

$$w=b_i\,z^{1/\tau}+\frac{\beta}{\tau\,z}+z^{1/\tau}\sum_{s=2}^{\infty}a_s\,z^{-(1+1/\tau)\,s}; \tag{4}$$

4) *полярные разложения вида*

$$w=a_{-1}\,z^{-1}+\sum_{s=0}^{\infty}a_s\,z^s. \tag{5}$$

В приведенных выше разложениях коэффициенты c_i — произвольные, коэффициенты a_s — однозначно выражаются через c_i и β, $b_i^{\tau}=1/\rho_n$, $i=1,2,\dots,\tau$, в соответствии с выбором одной из τ ветвей a_i.

Теорема 3. *Для уравнения (1) при* $\beta = 0$ *существуют следующие степенные разложения решений: семейство голоморфных разложений (3), асимптотическое разложение (4) и полярные разложения вида (5)* .

Литература

1. *Kudryashov N.A.* Double Backlund transformations and special integrals for the K_{II} hierarchy // Phys. Lett. 2000. V. 273A. P. 194-202.

2. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит. 1998.