ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ КОППЕЛЯ — КОНТИ

Н.А. Изобов [1], **Р.А. Прохорова** [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Сурганова, 11, 220072 Минск, Беларусь
izobov@im.bas-net.by

[2] Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220080 Минск, Беларусь

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной на полуоси $[0, +\infty)$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$ и фундаментальной матрицей $X(t)$.

Определение Коппеля — Конти. Будем говорить, что система (1) обладает L^p-дихотомией на полуоси $\mathbb{R}_+$ с параметром $p > 0$ и принадлежит множеству L^pD, если для нее существует пара взаимно дополнительных проекторов P_1 и P_2 таких, что выполнены условия

$$C_p(A) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \int\limits_0^t \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\|^p d\tau < +\infty, \quad D_p(A) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\|^p d\tau < +\infty.$$

В случае $P_1 = E$ и $P_2 = E$ множество L^pD обозначают соответственно L^pS и L^pN. Множества Коппеля — Конти L^pD, L^pS и L^pN играют важную роль в задаче об ограниченности решений линейной неоднородной системы и исследовании устойчивости по линейному приближению.

Приведем основные результаты по теории L^p-дихотомий, полученные авторами и изложенные в монографии [1].

Отметим прежде всего, что все эти множества удовлетворяют свойствам включения

$$L^pS \subset L^qS, \quad L^pN \subset L^qN, \quad L^pD \subset L^qD$$

при любых $p > q > 0$ и обладают при $p \geqslant 1$ свойством открытости относительно равномерно малых возмущений во множестве всех линейных систем, равно как и их предельные множества.

Асимптотическое поведение решений L^p-дихотомичных систем описывает

Теорема 1. *Характеристические показатели* $\lambda[x_1]$ *и* $\lambda[x_2]$ *любых нетривиальных решений* x_1 *и* x_2 *системы (1) из множества* L^pD, $p > 0$, *с начальными векторами* $x_i(0) \in P_i\mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, *удовлетворяют оценкам*

$$\lambda[x_1] \leqslant -[pC_p(A)]^{-1}, \quad \lambda[x_2] \geqslant [pD_p(A)]^{-1}.$$

Рассмотрим также возмущенные системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с возмущениями $f \in \cup_{m>1} F_m$ высшего порядка малости, где F_m – множество кусочно-непрерывных по $t \geqslant 0$ и непрерывных по $y \in U_\rho \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \rho\}$, $\rho = \rho(f)$, вектор-функций, удовлетворяющих условию

$$\|f(t, y)\| \leqslant L\|y\|^m, \quad m > 1, \quad (t, y) \in [0, +\infty) \times U_{\rho(f)}. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть система (1) принадлежит множеству* L^pS *при* $p \geqslant 1$. *Тогда при любом возмущении (3) нулевое решение системы (2) экспоненциально устойчиво, а для характеристического показателя* $\lambda[y]$ *всякого решения* y *этой системы с начальным значением* $y(0)$ *из достаточно малой окрестности начала координат выполняется оценка* $\lambda[y] \leqslant -1/C_1(A) < 0$.

Теорема 3. *Если система (1) обладает* L^p*-дихотомией с числом* $p \geqslant 1$ *и ненулевым вторым проектором* P_2, *то нулевое решение системы (2) с любым* m*-возмущением (3) неустойчиво.*

В случае системы (1) линейного приближения из множества L^pD с ненулевым проектором P_1 ранга $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ установлена условная экспоненциальная устойчивость нулевого решения дифференциальной системы (2) с любым m-возмущением $f \in F_m$, $m > 1$, при $p \geqslant 1$ и существование k-мерного семейства решений с отрицательными характеристическими показателями, не превосходящими величины $-1/C_1(A)$.

Литература

1. *Изобов Н. А., Прохорова Р.А.* Линейные дифференциальные системы Коппеля — Конти. Минск: Белорусская наука. 2008 230 с.