ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

С.В. Зубов, А.И. Иванов, М.В. Стрекопытова, С.А. Стрекопытов

Санкт-Петербургский государственный университет

Библиотечная пл. 2, 198104 Старый Петергоф, Россия

a_v_zubov@mail.ru

Рассмотрим систему

$$A_0\ddot{X} + A_1\dot{X} + A_2X = f(t, X, \dot{X}), \tag{1}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \end{pmatrix};$$

здесь $x_1, \ldots, x_k$ — обобщенные координаты, $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k$ — обобщенные скорости.

Далее рассмотрим однородную систему

$$A_0\ddot{X} + A_1\dot{X} + A_2X = 0. \tag{2}$$

Характеристическое уравнение системы (2) имеет вид

$$\det(\lambda^2 A_0 + \lambda A_1 + A_2) = 0. \tag{3}$$

Будем считать, что A_0, A_1, A_2 являются вещественными квадратными матрицами k-го порядка, причем матрицу A_0 — неособой.

Теорема 1. *Если все корни уравнения (3) различны, то:*

1) неособым линейным преобразованием фазового пространства системы (1) уравнение (2) можно привести к виду

$$\ddot{Y} + (K_1 + K_2)\dot{Y} + K_1K_2Y = 0, \tag{4}$$

где K_1, K_2 — постоянные квадратные матрицы, коммутирующие друг с другом, и такие, что матрица $K_1 - K_2$ неособая;

2) решение системы (4) может быть представлено в форме

$$Y = e^{-K_1t}(K_2 - K_1)^{-1}(Y_0 + K_2Y_0) + e^{-K_2t}(K_1 - K_2)^{-1}(\dot{Y}_0 + K_1Y_0),$$

при этом $Y = Y_0, \dot{Y} = \dot{Y}_0$ при $t = 0$;

3) положение равновесия $X = 0, \dot{X} = 0$ системы (1) при стандартных предположениях относительно нелинейных правых частей будет асимптотически устойчивым по Ляпунову тогда и только тогда, когда действительные части собственных чисел матриц K_1, K_2 положительны.