

# РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССЫ РАЗМНОЖЕНИЯ И ГИБЕЛИ, МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

В.И. Зеленков

Международный государственный экологический университет имени А.Д. Сахарова,  
Долгобродская 23, 220070, Минск, Беларусь  
vzelenkov@yandex.ru

Процессы размножения и гибели (*birth and death processes*) представляют собой много-уровневую модель, которая нашла широкое применение для решения задач популяционной динамики [1], систем массового обслуживания [2], генетики [3] и др. Они описываются [4] уравнениями вида

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)p_n(t) \quad (1)$$

Здесь  $p_n(t)$  — вероятность того, что система в момент времени  $t$  находится в состоянии с номером  $n$ ,  $\lambda_n$  — интенсивности рождений,  $\mu_n$  — гибелей. Известны уравнения типа (1) с линейной, квадратичной и другими видами зависимости  $\lambda_n$  и  $\mu_n$  от  $n$ .

Решение (1) ищется в форме

$$p_n(t) = \int_A^B \frac{Q_0(x)}{d_0} \frac{Q_n(x)}{d_n} \rho(x) e^{rtx} dx, \quad (2)$$

где  $Q_n(x)$  — полиномы, ортогональные на  $[A, B]$  с весом  $\rho(x)$  и квадратичной нормой  $d_n$  (предполагается, что в начальный момент система находится в состоянии 0). Подставляя (2) в (1), получаем

$$\lambda_{n-1} \frac{Q_{n-1}(x)}{d_{n-1}} + \mu_{n+1} \frac{Q_{n+1}(x)}{d_{n+1}} = (\lambda_n + \mu_n + rx) \frac{Q_n(x)}{d_n} \quad (3)$$

Задача, таким образом, сводится к подбору или построению ортогональных полиномов, для которых трехчленное рекуррентное соотношение имеет вид (3). В соответствии с методом, описанным в [5], в работе построены полиномы для некоторых конкретных зависимостей  $\lambda_n$  и  $\mu_n$  и изучены их свойства. Проанализирована динамика систем с такими интенсивностями рождений и гибелей.

### Литература

1. *Renshaw E.* Modelling Biological Populations in Space and Time. Cambridge, 1995.
2. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1991.
3. *Moran P.A.P.* A General Theory of the Distribution of Gene Frequences // Proc. Roy. Soc. London. 1958. V. 149B. P. 102–112.
4. *Ismail M.E.H., Nasson D.R., Letessier J., Galliano V.* Birth and Death Processes and Orthogonal Polynomials // Orthogonal Polynomials: Theory and Practice. NATO ASI Series, Paul Nevai, ed. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ, 1990. P. 229–255.
5. *Zelenkov V.* Dynamics of multilevel quantum systems and orthogonal polynomials of discrete variable given by recurrence relation. // Труды 4-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (АМАДЕ-2006). Том 2. Минск, 2006. С.60–63.