ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ИНФОРМАЦИОННО-КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ С НЕНАДЕЖНЫМИ СИСТЕМАМИ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

С. Э. Статкевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь
sstat@grsu.by

Рассматривается метод многомерных производящих функций для нахождения вероятностей состояний моделей информационно-компьютерных сетей, функционирующих в условиях высокой нагрузки, в переходном режиме. Для моделирования применяются марковские сети массового обслуживания, в которых параметры входящего потока и обслуживания заявок, выхода из строя и восстановления неисправных линий обслуживания зависят от времени.

Ключевые слова: переходной режим, вероятности состояний сети, производящая функция.

ВВЕДЕНИЕ

Современные информационно-компьютерные сети (ИКС) обеспечивают пользователям широкий набор услуг, включающий в себя передачу факсимильных и голосовых сообщений, электронную почту, работу с удаленными базами данных в реальном времени. По сути, ИКС обслуживают заявки (требования), где в качестве пользователей могут выступать клиенты банков, страховых компаний, посетители медицинских учреждений и т. д. [1]

Стохастический характер поступления заявок и их обработки позволяют использовать модели теории массового обслуживания (МО) в качестве адекватных моделей ИКС. В этом случае модель ИКС представляет собой сеть МО, состоящую из систем (СМО), с определенным числом линий обслуживания и входящим потоком заявок. В зависимости от ситуации возможен анализ сетей МО с ограниченным временем пребывания заявок в очередях систем, сетей с приоритетными заявками и др. как в стационарном, так и переходном режимах [2].

Фрагменты ИКС могут в случайные моменты времени выходить из строя. В этом случае в качестве их моделей могут использоваться сети МО с ненадежными СМО. В данной работе рассматривается один из методов нахождения вероятностей состояний модели ИКС произвольной архитектуры с ненадежными системами обслуживания.

АНАЛИЗ СЕТИ С НЕНАДЕЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть МО с однотипными заявками, состоящую из n СМО $S_1, S_2, \ldots, S_n$. В сеть поступает простейший поток заявок из внешней среды (система S_0) с интенсивностью $\lambda(t)$. Система S_i состоит из m_i идентичных линий обслуживания, время обслуживания заявок в каждой из которых распределено по экспоненциальному закону с параметром $\mu_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Будем считать, что линии обслуживания системы S_0 абсолютно надежны, а в $S_1, S_2, \ldots, S_n$ подвергаются случайным поломкам, причем время исправной работы каждой линии системы S_i имеет показательную функцию распределения (ф.р.) с параметром $\beta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. После поломки линия немедленно начинает восстанавливаться, и время восстановления также имеет показательную ф. р. с параметром $\gamma_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Допустим, что времена обслуживания заявок, длительности исправной работы и времена восстановления линий обслуживания являются независимыми случайными величинами. Под состояниями сети будем понимать вектор

$$Z(t) = (d,k,t) = (d_1,\ldots,d_n,k_1,\ldots,k_n,t) = (d_1(t),\ldots,d_n(t),k_1(t),\ldots,k_n(t)),$$

где $d_i(t)$- количество исправных линий обслуживания в системе S_i в момент времени t, $0 \le d_i(t) \le m_i$; $k_i(t)$- число заявок в системе S_i в момент времени t, $t \in [0,+\infty)$, $i = \overline{1,n}$.

Обозначим через p_{0j} вероятность поступления заявки из системы S_0 в систему S_j, $\sum_{j=1}^{n} p_{0j} = 1$; p_{ij} - вероятность перехода заявки в СМО S_j после ее обслуживания в СМО S_i, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, $i = \overline{1,n}$, $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ – функцию Хэвисайда. Матрица $P = \left\| p_{ij} \right\|_{(n+1)\times(n+1)}$ является матрицей вероятностей переходов неприводимой цепи Маркова. Будем также предполагать, что если во время обслуживания некоторой заявки линия обслуживания вышла из строя, то после окончания ее восстановления прерванная заявка дообслуживается. Заявки на обслуживание выбираются в соответствии с дисциплиной FIFO.

Случайный процесс $Z(t)=(d,k,t)$ является цепью Маркова со счетным числом состояний. Возможны следующие переходы в состояние $Z(t+\Delta t)=(d,k,t+\Delta t)$ за время Δt:

1) из состояния (d,k,t) с вероятностью

$$1-\left[\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j\right)+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right]\right]\Delta t+o(t);$$

2) из состояния $(d,k-I_i,t)$ с вероятностью

$$\left[\lambda(t)p_{0i}u(k_i)\Delta t+o(\Delta t)\right]\left[1-\left\{\lambda(t)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}p_{0j}u\left(k_j\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j\right)+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right]\right\}\Delta t+o(\Delta t)\right],\ i=\overline{1,n};$$

3) из состояния $(d,k+I_i,t)$ с вероятностью

$$\left[\mu_i(t)p_{i0}\min\left(d_i,k_i+1\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\left[1-\left\{\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right]\right\}\Delta t+o(\Delta t)\right],\ i=\overline{1,n};$$

4) из состояния $(d,k+I_i-I_j,t)$ с вероятностью

$$\left[\mu_i(t)p_{ij}\min\left(d_i,k_i+1\right)u\left(k_j\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\left[1-\left\{\lambda(t)+\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n}\left[\mu_r(t)\min\left(d_r,k_r\right)+\beta_r(t)d_r+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma_r(t)\left(m_r-d_r\right)\right]+\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j-1\right)+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right\}\Delta t+o(\Delta t)\right];$$

5) из состояния $(d-I_i,k,t)$ с вероятностью

$$\left[\gamma_i(t)\left(m_i-d_i+1\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\times$$

$$\times\left[1-\left\{\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j\right)+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right]\right\}\Delta t+o(\Delta t)\right],\ i=\overline{1,n};$$

6) из состояния $(d+I_i,k,t)$ с вероятностью

$$\left[\beta_i(t)\left(d_i+1\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\times$$

$$\times\left[1-\left\{\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j\right)+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right]\right\}\Delta t+o(\Delta t)\right],\ i=\overline{1,n};$$

7) из остальных состояний – с вероятностью $o(\Delta t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности и переходя к пределу при $\Delta t - 0$, получим систему разностно-дифференциальных уравнений для вероятностей состояний сети

$$\frac{dP(d,k,t)}{dt}=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_i(t)\min(d_i,k_i)+\beta_i(t)d_i+\gamma_i(t)(m_i-d_i)\right]\right]P(d,k,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)P(d,k-I_i,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\min(d_i,k_i+1)p_{i0}P(d,k+I_i,t)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)\min(d_i,k_i+1)p_{ij}u\left(k_j\right)P\left(d,k+I_i-I_j,t\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i+1)P(d-I_i,k,t)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(d_i+1)P(d+I_i,k,t). \qquad (1)$$

Пусть в каждый момент времени $d_i(t)\neq 0$, $i=\overline{1,n}$, и предположим, что все системы сети функционируют в режиме высокой нагрузки, т. е. $k_i(t)>0\ \ \forall t>0$, $i=\overline{1,n}$. Тогда система (1) принимает вид

$$\frac{dP(d,k,t)}{dt}=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\mu_i(t)+\beta_i(t)-\gamma_i(t)\right)d_i+\gamma_i(t)m_i\right]\right]P(d,k,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}P(d,k-I_i,t)+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)d_ip_{i0}P(d,k+I_i,t)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)d_ip_{ij}P\left(d,k+I_i-I_j,t\right)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i+1)P(d-I_i,k,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(d_i+1)P(d+I_i,k,t). \qquad (2)$$

Обозначим через $\Psi_{2n}(z,t)$, где $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n,z_{n+1},\ldots,z_{2n})$, $2n$- мерную производящую функцию

$$\Psi_{2n}(z,t)=\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d_1,\ldots,d_n,k_1,\ldots,k_n,t)z_1^{d_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{d_n}z_{n+1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot z_{2n}^{k_n}=$$

$$=\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{n+i}^{k_i},\ |z|<1. \qquad (3)$$

Умножим каждое из уравнений системы (2) на $\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l} z_l^{k_l}$ и просуммируем по всем возможным значениям d_l от 0 до m_l и по k_l от 0 до $+\infty$, $l=\overline{1,n}$. Тогда получим

$$\sum_{d_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{dP(d,k,t)}{dt}\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l} z_{n+l}^{k_l} = -\Bigg[\lambda(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[\big(\mu_i(t)+\beta_i(t)-\gamma_i(t)\big)d_i+\gamma_i(t)m_i\Big]\Bigg]\sum_{d_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l} z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}\sum_{d_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d,k-I,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l} z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)d_i p_{i0}\sum_{d_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d,k+I,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l} z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)d_i p_{ij}\sum_{d_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d,k+I_i-I_j,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l} z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i+1)\sum_{d_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d-I_i,k,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l} z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(d_i+1)\sum_{d_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d+I_i,k,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l} z_{n+l}^{k_l}. \qquad (4)$$

Преобразуя суммы, входящие в (4), для производящей функции получаем соотношение в частных производных

$$\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial t}=\left[-\lambda(t)\left(1-\sum_{i=1}^{n}p_{0i}z_{n+i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)m_i(1-z_i)\right]\Psi_{2n}(z,t)-$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\big(\mu_i(t)+\beta_i(t)\big)z_i-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\frac{p_{i0}}{z_{n+i}}-\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)p_{ij}\frac{z_{n+j}}{z_{n+i}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i(t)}{z_i}\right)\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}.$$

Для нахождения $\Psi_{2n}(z,t)$ можно предложить алгоритм, аналогичный рассмотренному в работе [3]. Разлагая $\Psi_{2n}(z,t)$ в ряд по степеням $z_1^{d_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{d_n} z_{n+1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot z_{2n}^{k_n}$, можно найти вероятности состояний сети, которые являются коэффициентами этого ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишневский, В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. М.: Техносфера, 2003. 506 с.
2. *Маталыцкий, М. А.* Теория массового обслуживания и ее применения / М. А. Маталыцкий, О. М. Тихоненко, А. В. Паньков. Гродно: ГрГУ, 2008. 771 с.
3. *Колузаева, Е. В.* Нахождение оптимальных доходов в открытой двухузловой НМ-сети с помощью *z*-преобразований / Е. В. Колузаева // Вестник ГрГУ. Сер. 2. 2010. № 1. С. 20–30.