О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ ДЮЛАКА — ЧЕРКАСА ДЛЯ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

А.А. Гринь

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,

Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь

grin@grsu.by

Рассмотрим систему Куклеса в виде

$$\dot{x} = y \equiv P(x,y), \quad \dot{y} = h_0(x) + h_1(x)y + h_2(x)y^2 + h_3(x)y^3 \equiv Q(x,y), \tag{1}$$

где $h_i(x)$, $i = 0,\dots,3$, являются достаточно гладкими функциями. Для оценки числа и локализации предельных циклов таких систем эффективно применяется функция Дюлака, для построения которой в виде $B = |\Psi|^{1/k}$, $0 \neq k \in \mathbb{R}$, применяется подход, предложенный Л.А. Черкасом [1, 2] и основанный на выполнении условия

$$\Phi(x,y) \equiv k\Psi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q > 0\ (< 0) \tag{2}$$

в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. В работе [3] показано, что в случае системы Льенара функцию Черкаса Ψ для уменьшения объема вычислений удобно искать в виде полинома

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x) y^{n-i}, \tag{3}$$

так как тогда функция $\Phi(x)$ не зависит от y, если функции $\Psi_i(x)$ удовлетворяют соответствующей линейной ситеме дифференциальных уравнений. Аналогичный подход для системы (1) изложен в работе [4], однако не представлен алгоритм, позволяющий эффективно строить функцию Ψ на практике. В докладе будет представлена новая процедура построения функции (3) для системы (1). Соответсвующая функция (2) имеет вид

$$\Phi(x,y) = \Phi_{n+1}(x)y^{n+1} + \Phi_n(x)y^n + \ldots + \Phi_2(x)y^2 + \Phi_1(x)y + \Phi_0(x).$$

Анализ структуры коэффициентов $\Phi_i(x)$ показывает, что $\Phi_{n+1}(x) \equiv 0$ при $k = -2$, а $\Psi_i(x)$, $i = 2, \ldots, n-1$, последовательно выражаются из условий $\Phi_n \equiv 0, \ldots, \Phi_3 \equiv 0$ через $\Psi_1(x)$, которую удобно искать в виде $\Psi_1(x) = \sum_{j=0}^{m} C_j x^j$, $C_j \in \mathbb{R}$. Функция $\Psi_n(x) + C_{m+1}$ находится как решение линейного дифференциального уравнения $\Phi_1(x) = 0$. Тогда положительность функции $\Phi(x,y) = \Phi_2(x)y^2 + \Phi_0(x)$ равносильна условиям $\Phi_2(x) \geqslant 0$, $\Phi_0(x) > 0$ в полосе $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ локализации предельных циклов системы (1). Для выполнения указанных условий используем сеточную задачу

$$L \to \max, \quad \sum_{j=0}^{m} C_j \Phi_{0j}(x) + C_{m+1} - L \geqslant 0, \quad \sum_{j=0}^{m} C_j \Phi_{2j}(x_l) + C_{m+1} - L \geqslant 0,$$

где x_l, $l = 1, \ldots, N_0$ — узлы равномерной сетки, покрывающей промежуток $[x_1, x_2]$ [3].

Литература

1. *Черкас Л.А.* Функция Дюлака полиномиальных автономных ситем на плоскости // Дифференц. уравнения 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.

2. *Grin A.A., Schneider* On some classes of limit cycles of planar dynamical systems // Dyn. Contin. Descrete Impuls. Syst. 2007. Ser. A. Math. Anal. 14. P. 641–656.

3. *Гринь А.А., Черкас Л.А.* Функции Дюлака для систем Льенара // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Минск. 2000. Т. 4. С. 29–38.

4. *Gasull A., Giacomini H.* Upper bounds for the number of limit cycles through linear differential equations // Pac. J. Math. 2006. P. 277–296.