В среднем время кластеризации данных с помощью алгоритма *максимин* относительно одного потока уменьшилось на 58 % для двух потоков, на 115 % – для трех и на 147 % – для четырех потоков. Здесь с увеличением количества объектов увеличивается и эффект от распараллеливания вычислений.

* * *

Исследования алгоритмов *k-средних* и *максимина* на предмет возможности их выполнения в параллельном режиме позволили сформулировать следующие заключения.

1. Оба алгоритма поддаются распараллеливанию, поскольку в каждом из них существует минимум две операции с некоррелирующими результатами.

2. Распараллеливание вычислений демонстрирует уменьшение времени выполнения алгоритмов уже при двух процессорах.

3. Увеличение производительности алгоритмов линейно зависит от увеличения числа вычислителей.

4. С увеличением количества объектов классификации увеличивается производительность параллельных вычислений. Причем для алгоритма *k-средних* эта зависимость нелинейная, а для алгоритма *максимин* – линейная.

5. С увеличением количества классов в алгоритме *k-средних* линейно увеличивается производительность параллельных вычислений.

Таким образом, полученные результаты подтвердили целесообразность распараллеливания вычислений в алгоритмах *k-средних* и *максимина*, что увеличивает эффективность классификации и кластеризации данных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Серебряная Л. В. Метод автоматической классификации текстовой информации по образцу / Л. В. Серебряная, С. В. Чебаков // Информационные системы и технологии: материалы VI Междунар. конф. (Минск, 24–25 нояб. 2010 г.). Минск, 2010. С. 244–247.
2. Серебряная Л. В., Чебаков С. В. Методы автоматической классификации и кластеризации текстовой информации // Информатизация образования. 2011. № 2. С. 52–61.
3. Таненбаум Э., Стеен М. ван. Распределенные системы: принципы и парадигмы. СПб., 2003. (Классика computer science).
4. Троелсен Э. Язык программирования C# 2010 и платформа .NET 4: пер. с англ. 5-е изд. М., 2011.
5. Theodoridis S., Koutroumbas K. Pattern Recognition. 4th edition. Athens, 2009.

Поступила в редакцию 26.03.13.

Федор Игоревич Третьяков – аспирант кафедры программного обеспечения информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Научный руководитель – Л. В. Серебряная.

Лия Валентиновна Серебряная – кандидат технических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

УДК 517.95

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ, А. В. МОТЕВИЧ

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ

Доказана корректность по Адамару задачи Гурса для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений с двумерным параметром (временем) при зависящих от времени областях определения зависящих от времени неограниченных операторных коэффициентов. Доказательство корректности осуществляется путем обобщения и развития известного метода энергетических неравенств. Единственность сильных решений этой задачи вытекает из энергетического неравенства, выведенного с помощью абстрактных сглаживающих операторов Иосиды – Ломовцева. Для доказательства существования ее сильных решений устанавливается плотность множества значений задачи Гурса новой для задач Гурса техникой сопряженных операторов к произведению операторов. Эта техника основана на лемме Ломовцева о сопряженном операторе к произведению ограниченного и неограниченного операторов. Приведен пример новой корректной частично характеристической краевой задачи для гиперболического уравнения в частных производных второго порядка с двумерным временем при условиях типа Гурса и зависящих от одной из временных переменных граничных условиях по пространственной переменной.

Ключевые слова: задача Гурса; сильное решение; корректность по Адамару; переменная область определения; частично характеристическая краевая задача.

The correctness by Hadamard of the Goursat problem for complete hyperbolic operator-differential equations with respect to two-dimensional parameter (time) with time-dependent domains of time-dependent unbounded operator coefficients is proved. Proof of the correctness is performed by means of generalization and development of well-known method of energy inequalities. The uniqueness of strong solutions of this problem follows from the energy inequality derived with the help of abstract smoothing Yosida – Lomovtsev's operators. In order to prove the existence of its strong solutions the density of region of the Goursat problem is established by means of new technique of conjugates to product of bounded and unbounded operators at first for Goursat problems. This technique is based on Lomovtsev's lemma about the conjugate to product of bounded and unbounded operators. New part-characteristic boundary value problems for a two-dimensional second-order hyperbolic partial differential equation with respect to two-dimensional time under conditions of Goursat type and with one-dimensional time-dependent boundary conditions in the spatial variable can serve as examples of such well-posed Goursat problems.

Key words: Goursat problem; strong solution; correctness by Hadamard, variable domain; part-characteristic boundary value problem.

Задача Гурса для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с постоянными областями определения операторов изучалась в [1] и с переменными областями определения операторов – в [2, 3]. В данной статье обобщаются результаты и совершенствуется метод энергетических неравенств, использованных в этих работах: энергетическое неравенство для сильных решений задачи Гурса выводится так же, как в [2, 3], но плотность множества ее значений устанавливается новой для задач Гурса техникой сопряженных операторов к произведению операторов из [4].

1. Постановка задачи Гурса. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. В прямоугольнике $\mathcal{T}=]0,T_1[\times]0,T_2[$ изменения двумерного времени $t=\{t_1,t_2\}$ доказывается корректность по Адамару гиперболического уравнения

$$\mathcal{L}(t)u\equiv\frac{\partial^2u(t)}{\partial t_2\partial t_1}+A_1(t)\left[a_1(t)\frac{\partial u(t)}{\partial t_1}+a_2(t)\frac{\partial u(t)}{\partial t_2}\right]+A(t)u(t)=f(t),\ t=\{t_1,t_2\}\in\mathcal{T}, \tag{1}$$

при условиях Гурса

$$l_1u\equiv u(t_1,0)=\varphi_1(t_1),\ t_1\in[0,T_1],\ l_2u\equiv u(0,t_2)=\varphi_2(t_2),\ t_2\in[0,T_2], \tag{2}$$

где $A_1(t)$ и $A(t)$ – линейные неограниченные замкнутые операторы в H с зависящими от t и плотными областями определения $D(A_1(t))$ и $D(A(t))$ соответственно, $D(A(t))\subset D(A_1(t))$, a_i, $i=1,2,$ – ограниченные числовые функции переменной t, u – функция переменной t со значениями в H.

Задача Гурса (1), (2) порождает линейный неограниченный оператор $L\equiv\{\mathcal{L}(t),l_1,l_2\}$: $E\supset D(L)\to F$, действующий из банахова пространства E, полученного замыканием множества $D(L)=\{u\in\mathcal{H}=L_2(\mathcal{T},H):\quad u(t)\in D(A(t)),\quad \partial u(t)/\partial t_i\in D(A_1(t)),\quad t\in\overline{\mathcal{T}}=[0,T_1]\times[0,T_2],\quad \partial u/\partial t_i,$ $\partial^2u/\partial t_2\partial t_1,\ A_1(t)(\partial u/\partial t_i),\ A(t)u\in\mathcal{H},\ i=1,2\}$ по норме

$$\|u\|_E=\left[\sup_{t\in\mathcal{T}}\sum_{i=1}^{2}\int_0^{T_i}\left(\left|\partial u(t)/\partial t_i\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u(t)\right|^2\right)dt_i\right]^{1/2},$$

в гильбертово пространство $F=\mathcal{H}\times H_1\times H_2$ всех функций $\Phi=\{f(t),\varphi_1(t_1),\varphi_2(t_2)\}$ таких, что $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$, с эрмитовой нормой $\|\Phi\|_F=(\|f\|_0^2+\|\varphi_1\|_1^2+\|\varphi_2\|_2^2)^{1/2}$. Под производными абстрактных функций понимаются обобщенные абстрактные функции (распределения Шварца), отождествимые с интегрируемыми по Бохнеру функциями, т. е. регулярные обобщенные функции. Здесь $A^{1/2}(t)$ – степень порядка $1/2$ самосопряженных положительных и ограниченно обратимых операторов $A(t)$, $\|\cdot\|_0$ – норма в $\mathcal{H}$ и H_i – замыкания следов функций $u\in D(L)$ при $t_j=0$ по эрмитовым нормам

$$\|u\|_i=\left[\int_0^{T_i}\left(\left|\partial u/\partial t_i\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Big|_{t_j=0}dt_i\right]^{1/2},\ j\neq i;\ i,\ j=1,2.$$

Стандартным образом доказывается

Лемма 1. *Если в H операторы $A(t)$ самосопряжены, положительны и имеют ограниченные обратные операторы $A^{-1}(t)$, ограничены и измеримы числовые функции $|a_i(t)|\le c_1$, $i=1,2,t\in\overline{\mathcal{T}}$, и в $\mathcal{H}$ плотно множество $D^*(L)=\{v\in D(L):\ v(t)\in D(A_1^*(t)),\quad t\in\overline{\mathcal{T}},\ A_1^*(t)v\in\mathcal{H}\}$, где $A_1^*(t)$ – сопряженные операторы с областями определения $D(A_1^*(t))$ к операторам $A_1(t)$ в H, то оператор L допускает замыкание (сильное расширение) $\overline{L}\equiv\{\overline{\mathcal{L}}(t),l_1,l_2\}:E\supset D(\overline{L})\to F$.*

Определение. Решения $u\in D(\overline{L})$ операторного уравнения $\overline{L}u=\Phi,\Phi\in F$, называются сильными решениями задачи Гурса (1), (2).

2. Единственность сильных решений задачи Гурса. Единственность сильных решений задачи Гурса (1), (2) вытекает из выведенного далее энергетического неравенства.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения леммы 1, функции* $0 < c_0 \le a_i(t) \in C(\overline{\mathcal{T}}),\ i = 1,2,$ *при почти всех* $t \in \mathcal{T}$ *ограничены частные производные* $|\partial a_i(t)/\partial t_j| \le c_2,\ i, j = 1,2,$ *и*

1. При всех $t \in \overline{\mathcal{T}}$ *операторы* $A_1(t)$ *подчинены квадратному корню* $A^{1/2}(t)$ *с областями определения* $D(A^{1/2}(t))$ *операторов* $A(t)$ $(|A_1(t)w| \le c_3 |A^{1/2}(t)w|\ \forall w \in D(A^{1/2}(t)), c_3 > 0,)$ *и*

$$-\mathrm{Re}(A_1(t)v, v) \le c_4 |v|^2 \quad \forall v \in D(A_1(t)),\ c_4 \ge 0. \tag{3}$$

II. В H *при всех* $t \in \overline{\mathcal{T}}$ *ограниченные обратные операторы* $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{T}}, \mathcal{L}(H))$ *сильно непрерывны по* t, *ограничены их сильные производные* $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{T}}, \mathcal{L}(H)), i = 1,2,$ *и*

$$-\left((\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)g, g\right) \le c_5 (A^{-1}(t)g, g)\ \forall g \in H,\ i = 1,2,\ c_5 \ge 0. \tag{4}$$

Тогда справедливо энергетическое неравенство

$$\|u\|_E^2 \le c_6 \left\|\overline{L}u\right\|_F^2 \quad \forall u \in D(\overline{L}),\ c_6 = (c_1/c_0)\exp\{(T_1 + T_2)\max\{2 + (c_2/c_0) + 4c_1c_4, (c_2/c_0) + c_5\}\}. \tag{5}$$

Доказательство. Уравнение (1) умножаем скалярно в H на функцию $e^{c\theta(t)}\left(a_1(t)(\partial u/\partial t_1) + a_2(t)(\partial u/\partial t_2)\right), \forall c \ge 0,$ где $\theta(t) = \tau_1 + \tau_2 - t_1 - t_2,$ интегрируем по $t \in \mathcal{T}_\tau = [0, \tau_1] \times [0, \tau_2],\quad 0 < \tau_i < T_i,\ i = 1,2.$ Интегрируя по частям по $t_j,\ j \ne i,$ имеем неравенства

$$\int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_i - t_i)} a_i(t) \left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2 |_{t_j = \tau_j}\, dt_i \le 2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1}, a_i(t)\frac{\partial u}{\partial t_i}\right) dt +$$

$$+\int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_j + \tau_i - t_i)} a_i(t) \left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2 |_{t_j = 0}\, dt_i + \left((c_2/c_0) - c\right)\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)} a_i(t) \left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2 dt,\ \ j \ne i;\ i,\ j = 1,\ 2,\ u \in D(L). \tag{6}$$

Согласно неравенству (3), оценкам на $a_i(t),\ i = 1,2,$ и элементарным оценкам получаем

$$-4c_1c_4 \int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c\theta(t)} \left(a_1(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + a_2(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right) dt \le$$

$$\le 2\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c\theta(t)} \left(A_1(t)\left[a_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1} + a_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}\right], a_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1} + a_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}\right) dt,\ \ u \in D(L). \tag{7}$$

Применяя сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1},\ \varepsilon > 0,$ со значениями в $D(A(t))$ из [4], интегрируем по частям по t_j, устремляем $\varepsilon \to 0$ и ввиду свойств $A_\varepsilon^{-1}(t)$ аналогично [4] приходим к

$$\int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_i - t_i)} a_j(t) \left|A^{1/2}(t)u\right|^2 |_{t_j = \tau_j}\, dt_i = 2\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c\theta(t)} \left(A(t)u, a_j(t)\frac{\partial u}{\partial t_j}\right) dt +$$

$$+\int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_i + \tau_j - t_i)} a_j(t) \left|A^{1/2}(t)u\right|^2 |_{t_j = 0}\, dt_i + \int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c\theta(t)} \frac{\partial a_j(t)}{\partial t_j}\left(A(t)u, u\right) dt +$$

$$+\int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c\theta(t)} a_j(t)\left[-\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_j} A(t)u, A(t)u\right) - c(A(t)u, u)\right] dt,\ j \ne i;\ i,\ j = 1,2,\ u \in D(L).$$

Здесь применяем неравенства (4), оценки для $a_j(t),\ j = 1,2,$ и для всех $u \in D(L)$ находим

$$\int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_i - t_i)} a_j(t) \left|A^{1/2}(t)u\right|^2 |_{t_j = \tau_j}\, dt_i \le 2\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c\theta(t)} \left(A(t)u, a_j(t)\frac{\partial u}{\partial t_j}\right) dt +$$

$$+\int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_i - t_i)} a_j(t) \left|A^{1/2}(t)u\right|^2 |_{t_j = 0}\, dt_i +$$

$$+\left((c_2/c_0) + c_5 - c\right)\int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c\theta(t)} a_j(t)\, |A^{1/2}(t)u|^2\, dt,\ \ j \ne i;\ \ i, j = 1,2. \tag{8}$$

Складываем соотношения (6) – (8), применяем элементарные оценки и имеем неравенство

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{2}\int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_i-t_i)}\left(a_i(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+a_j(t)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Big|_{t_j=\tau_j}dt_i\le$$

$$\le 2\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c(\tau_1-t_1+\tau_2-t_2)}\left(\mathcal{L}(t)u, a_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1}+a_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt+$$

$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{2}\int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_j+\tau_i-t_i)}\left(a_i(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+a_j(t)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Big|_{t_j=0}dt_i+$$

$$+\big((c_2/c_0)+4c_1c_4-c\big)\int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c(\tau_1-t_1+\tau_2-t_2)}\left(a_1(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+a_2(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right)dt+$$

$$+\big((c_2/c_0)+c_5-c\big)\int_{\mathcal{T}_\tau} e^{c(\tau_1-t_1+\tau_2-t_2)}(a_1(t)+a_2(t))\,|A^{1/2}(t)u|^2\,dt,\ \ u\in D(L). \tag{9}$$

В этом неравенстве левую часть оцениваем снизу, к первому интегралу правой части применяем неравенство Коши – Буняковского, приводим подобные слагаемые, опускаем неположительные слагаемые при $c=c_6$, берем точную верхнюю грань по τ_i от 0 до T_i, $i=1,2$, обеих частей и получаем неравенство (5) для $u\in D(L)$. Затем это неравенство распространяется предельным переходом на все сильные решения $u\in D(\overline{L})$. Теорема 1 доказана.

Непосредственно из энергетического неравенства (5) вытекает

Следствие 1. В предположениях теоремы 1 *верно* $R(\overline{L})=\overline{R(L)}$, *где* $R(\overline{L})$ *– множество значений оператора* $\overline{L}$, *а* $\overline{R(L)}$ *– замыкание в* F *множества значений* $R(L)$ *оператора* L.

3. Существование сильных решений задачи Гурса. Благодаря следствию 1 для обоснования везде разрешимости во множестве сильных решений исходной задачи Гурса на F достаточно доказать плотность в F множества значений $R(L)$ оператора L. Сначала покажем плотность в $\mathcal{H}$ множества значений оператора задачи Гурса (1), (2) при однородных условиях Гурса. Символами H_t^+ обозначим гильбертовы пространства, полученные наделением областей определения $D(A^{1/2}(t))$ операторов $A^{1/2}(t)$ эрмитовыми нормами $|\cdot|_{(t)}=|A^{1/2}(t)\cdot|$.

Лемма 2. *Пусть выполняются предположения теоремы* 1 *и условия*

III. При всех $t\in\overline{\mathcal{T}}$ *операторы* $A_1(t)$ *удовлетворяют неравенству (3) со знаком плюс в его левой части, в* H *операторы* $\partial A^{-1}(t)/\partial t_k, k=1,2,$ *сильно непрерывны по* t, *существуют ограниченные сильные смешанные производные* [6] $\partial^2A^{-1}(t)/\partial t_2\partial t_1=\partial^2A^{-1}(t)/\partial t_1\partial t_2\in L_\infty(\mathcal{T},\mathcal{L}(H))$ *и верно неравенство*

$$\left|\left((\partial^2A^{-1}(t)/\partial t_2\partial t_1)v,g\right)\right|\le c_7\,|v|\,|A^{-1/2}(t)g|\ \ \forall v,g\in H,\ c_7\ge 0. \tag{10}$$

IV. Для $i=1, j=2$ *или* $i=2, j=1$ *при всех* $t\in\overline{\mathcal{T}}$ *операторы* $A(t)$ *имеют такие сильные производные* [5] $\partial A(t)/\partial t_i$, *что ограничены операторы* $(\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)(\partial A(t)/\partial t_j)\in L_\infty(\mathcal{T},\mathcal{L}(H_t^+,H))$, $(\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)A(t)\in L_\infty(\mathcal{T},\mathcal{L}(H))$, $j\neq i;\ \ i,j=1,2$.

Если для функции $w\in\mathcal{H}$ *выполняется тождество*

$$\int_{\mathcal{T}}(\mathcal{L}(t)u,w)dt=0\ \forall u\in D_0(L)=\{u\in D(L): l_1u=l_2u=0, t\in\overline{\mathcal{T}}\}, \tag{11}$$

то $w=0$.

Доказательство. Для значений индексов $i=1, j=2,$ благодаря простейшему случаю метода продолжения по параметру, лемму 2 достаточно доказать для оператора

$$\mathcal{L}_0(t)u\equiv\frac{\partial^2u(t)}{\partial t_2\partial t_1}-\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial(A(t)u(t))}{\partial t_2}+A(t)u(t),$$

потому что априорная оценка (5) выполняется в частном случае для оператора $\overline{L}$ с однородными условиями Гурса и операторы $\mathcal{L}(t)$ и $\mathcal{L}_0(t)$ отличаются друг от друга двумя средними главными членами, которые подчинены двум крайним опорным главным членам оператора $\mathcal{L}(t)$, и двумя младшими членами, которые являются ограниченными операторами из E в $\mathcal{H}$,

$$\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}_0(t)=a_1(t)A_1(t)\frac{\partial}{\partial t_1}+a_2(t)A_1(t)\frac{\partial}{\partial t_2}+\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1}A(t)\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial A(t)}{\partial t_2} \tag{12}$$

в силу ограниченности операторов $(\partial A^{-1}(t)/\partial t_1)A(t)\in L_\infty(\mathcal{T},\mathcal{L}(H))$, $(\partial A^{-1}(t)/\partial t_1)(\partial A(t)/\partial t_2)\in$ $\in L_\infty(\mathcal{T},\mathcal{L}(H_t^+,H))$ [7, с. 154; 8]. Для применения метода продолжения по параметру $\mu\in[0,1]$ убедимся в справедливости энергетического неравенства для семейства операторов $L_\mu=\{\mathcal{L}_\mu(t),l_1,l_2\}$, где

$$\mathcal{L}_\mu(t)=(1-\mu)\mathcal{L}_0(t)+\mu\mathcal{L}(t)=\mathcal{L}_0(t)+\mu(\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}_0(t))=$$
$$=\mathcal{L}(t)-(\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}_0(t))+\mu(\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}_0(t))=\mathcal{L}(t)+(\mu-1)(\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}_0(t)).$$

В правой части неравенства (9) используем тождество

$$2\,\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\mathcal{L}(t)u,a_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1}+a_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt=2\,\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\mathcal{L}_\mu(t)u,a_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1}+a_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt+$$
$$+2(1-\mu)\,\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\mathcal{L}(t)u-\mathcal{L}_0(t)u,a_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1}+a_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt,\ u\in D(L),\ \mu\in[0,1],$$

где ввиду (12), неравенства (3) со знаком плюс в его левой части, ограниченности операторов $(\partial A^{-1}(t)/\partial t_1)A(t)$, $(\partial A^{-1}(t)/\partial t_1)(\partial A(t)/\partial t_2)$, неравенства Коши – Буняковского и арифметического неравенства $2ab\le a^2+b^2$ последний интеграл со своим коэффициентом оценивается сверху величиной

$$c_8\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(a_1(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+a_2(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\left(a_1(t)+a_2(t)\right)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)dt,\ \mu\in[0,1],\ c_8\ge 0.$$

Поэтому правая часть неравенства (9) не будет превосходить величины

$$2\,\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(\mathcal{L}_\mu(t)u,a_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1}+a_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt+\sum_{i,j=1}^{2}\int_0^{\tau_i}e^{c\theta(t)}\left(a_i(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+a_j(t)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t_j=0}dt+$$
$$+((c_2/c_0)+4c_1c_4+c_8-c)\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(a_1(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+a_2(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right)dt+$$
$$+((c_2/c_0)+c_5+c_8-c)\int_{\mathcal{T}_\tau}e^{c\theta(t)}\left(a_1(t)+a_2(t)\right)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2dt,\ \ \mu\in[0,1]. \tag{13}$$

Таким образом, оценивая неравенство (9) с правой частью (13) так же, как при завершении доказательства теоремы 1, при $c=c_6+c_8$ получаем энергетическое неравенство $\|u\|_E^2\le c_9\left\|\overline{L}_\mu u\right\|_F^2$, $u\in D(\overline{L})$, $c_9\ge c_6$, $\mu\in[0,1]$.

Поэтому для любого значения двумерного параметра $\tau=\{\tau_1,\tau_2\}$, $0\le\tau_k<T_k$, $k=1,2$, вместо тождества (11) в тождестве

$$\int_{\mathcal{T}}(\mathcal{L}_0(t)u,w)dt=0\ \ \forall u\in D_0(L) \tag{14}$$

можно положить $u=A^{-1}(t)h$ для всех функций h из множества $M_\tau=\{h\in\mathcal{H}:$ $:\partial h/\partial t_k,\partial^2h/\partial t_2\partial t_1\in\mathcal{H},\ k=1,\ 2;\ \ h(t)=0,\tau_1\le t_1\le T_1,0\le t_2\le\tau_2;h(t)=0,0\le t_1\le\tau_1,\tau_2\le t_2\le T_2\}$ и, используя самосопряженность операторов $A(t)$ в H, получить тождество

$$\int_{\mathcal{T}^\tau}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t_2\partial t_1},e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right)dt=\int_{\mathcal{T}^\tau}e^{c\gamma(t)}\Phi\left(h,v\right)dt,\ \forall h\in M_\tau, \tag{15}$$

где полуторалинейная форма

$$\Phi(h,v)=-\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial h}{\partial t_1}+\frac{\partial^2 A^{-1}(t)}{\partial t_2\partial t_1}h+h,\frac{\partial v}{\partial t_1}\right),$$

область интегрирования $\mathcal{T}^\tau=]\tau_1,T_1[\times]\tau_2,T_2[$, показатель степени $\gamma(t)=T_1-t_1+T_2-t_2$ и функция v – решение в $\mathcal{H}$ задачи Коши:

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t_1}=e^{-c\gamma(t)}w(t),\ t\in\mathcal{T}^\tau;\ \ v\big|_{t_1=\tau_1}=0,\tau_2\le t_2\le T_2,c\ge 0. \tag{16}$$

Подстановка $u=A^{-1}(t)h$ в тождество (14) допустима, потому что $A^{-1}(t)h\in D_0(L)\ \forall h\in M_\tau$ ввиду ограниченности операторов $\partial A^{-1}(t)/\partial t_k,\ k=1,\ 2,\ \partial^2A^{-1}(t)/\partial t_2\partial t_1=\partial^2A^{-1}(t)/\partial t_1\partial t_2$ в H.

Правую часть тождества (15) оцениваем сверху с помощью неравенства Коши – Буняковского и приходим к неравенству

$$\left|\int\limits_{\mathcal{T}^\tau}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t_2\partial t_1},e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right)dt\right|\le c_{10}(v)\left(\int\limits_{\mathcal{T}^\tau}\left|\frac{\partial h}{\partial t_1}\right|^2dt\right)^{1/2},\quad c_{10}(v)>0,$$

которое согласно определению сопряженного оператора означает, что существует след дифференцируемой функции $\left(A^{-1}(t)(\partial v/\partial t_1)\right)\big|_{t_2=T_2}=0$ и производная $\partial\left(A^{-1}(t)(\partial v/\partial t_1)\right)/\partial t_2\in\mathcal{H}_\tau=L_2(\mathcal{T}^\tau,H)$. На этом основании в левой части тождества (15) интегрируем по частям один раз по t_2 и для любых $h\in M_\tau$ имеем тождество

$$-\int\limits_{\mathcal{T}^\tau}\left(\frac{\partial h}{\partial t_1},\frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right]\right)dt=\int\limits_{\mathcal{T}^\tau}e^{c\gamma(t)}\Phi(h,v)dt, \tag{17}$$

которое распространяем предельным переходом на все функции $h\in\mathcal{H}_\tau=L_2(\mathcal{T}^\tau,H)$, у которых первая частная производная $\partial h/\partial t_1\in\mathcal{H}_\tau$ и след $h\big|_{t_1=\tau_1}=0,\tau_2\le t_2\le T_2$. В тождестве (17), полученном в результате этого предельного перехода по h, полагаем $h=v$, берем удвоенную вещественную часть и находим равенство

$$-2\operatorname{Re}\int\limits_{\mathcal{T}^\tau}\left(\frac{\partial v}{\partial t_1},\frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right]\right)dt=2\operatorname{Re}\int\limits_{\mathcal{T}^\tau}e^{c\gamma(t)}\Phi(v,v)dt. \tag{18}$$

В левой части этого равенства нельзя проинтегрировать по частям один раз по t_2 справа налево, так как смешанная производная $\partial^2v/\partial t_2\partial t_1$ может не существовать в $\mathcal{H}_\tau$. Поэтому удвоенную вещественную часть его левой части вычисляем с помощью леммы 4 из [4]. При почти всех $t_1\in]\tau_1,T_1[$ применяем эту лемму к ограниченному самосопряженному оператору $S=e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)$ в $\mathcal{H}_{\tau_2}=L_2(]\tau_2,T_2[,H)$ и неограниченному замкнутому оператору $P:\mathcal{H}_{\tau_2}\supset D(P)\to\mathcal{H}_{\tau_2}\times H$, действующему на своей области определения $D(P)=\{p\in\mathcal{H}_{\tau_2}:\ \ \partial p/\partial t_2\in\mathcal{H}_{\tau_2},\ \ p(t_1,T_2)=0\}$ по правилу $Pp=\{\partial p/\partial t_2,p(\tau_2)\}$. Можно доказать утверждение о том, что сопряженным оператором к оператору P является оператор $P^*:\mathcal{H}_{\tau_2}\times H\supset D(P^*)\to\mathcal{H}_{\tau_2}$ с областью определения $D(P^*)=\{\{\tilde p,\tilde p(\tau_2)\}\in\mathcal{H}_{\tau_2}\times H:\partial\tilde p/\partial t_2\in\mathcal{H}_{\tau_2}\}$, действующий по правилу $P^*(\{\tilde p,\tilde p(\tau_2)\})=-\partial\tilde p/\partial t_2$. Доказательство некоторого аналога этого утверждения имеется в [9]. Для указанных выше операторов S, P в пространствах $X=Y=\mathcal{H}_{\tau_2}$, $Z=\mathcal{H}_{\tau_2}\times H$ воспользуемся формулой $(PS)^*=\overline{S^*P^*}$ из леммы 4, где $\overline{S^*P^*}$ – сильное замыкание в $\mathcal{H}_{\tau_2}\times H\times\mathcal{H}_{\tau_2}$ произведения S^*P^* с областью определения $D(S^*P^*)$ сопряженных операторов P^* и S^*, сопряженного оператора $(PS)^*$ к произведению $PS:\mathcal{H}_\tau\supset D(PS)\to\mathcal{H}_{\tau_2}\times H$ операторов S и P [4]. При почти всех $t_1\in]\tau_1,T_1[$ для функций $g\in D(S^*P^*)=D(P^*)$ в $\mathcal{H}_{\tau_2}$ очевидно равенство

$$e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial g(t)}{\partial t_2}\quad=\quad\frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)g(t)\right]-\frac{\partial(e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t))}{\partial t_2}g(t).$$

Поэтому при почти всех $t_1 \in]\tau_1, T_1[$ согласно определению сильного замыкания $\overline{S^*P^*}$ произведения S^*P^* и вида сопряженных операторов P^*, $S^* = S$ при почти всех $\tau_2 \in]0, T_2[$ в $\mathcal{H}_{\tau_2}$ верны равенства

$$(PS)^*\left\{\frac{\partial v(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial v(\tau_2)}{\partial t_1}\right\} = \overline{S^*P^*}\left\{\frac{\partial v(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial v(\tau_2)}{\partial t_1}\right\} =$$

$$= \overline{-e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial t_2}}\ \frac{\partial v}{\partial t_1} = \overline{-\frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\right] - \frac{\partial(e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t))}{\partial t_2}}\ \frac{\partial v}{\partial t_1} =$$

$$= \left[-\overline{\frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\right]} + \frac{\partial(e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t))}{\partial t_2}\right]\frac{\partial v}{\partial t_1} = -\frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right] + \frac{\partial(e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t))}{\partial t_2}\frac{\partial v}{\partial t_1}, \qquad (19)$$

так как операторы $\partial A^{-1}(t)/\partial t_2$ ограничены в $\mathcal{H}_{\tau_2}$ и выше показано существование частных производных $\partial v/\partial t_1$, $\partial\left(A^{-1}(t)(\partial v/\partial t_1)\right)/\partial t_2 \in \mathcal{H}_{\tau_2}$. При почти всех $t_1 \in]\tau_1, T_1[$ принадлежность правой части равенств (19) пространствам $\mathcal{H}_{\tau_2}$ подтверждает принадлежность при почти всех $\tau_2 \in]0, T_2[$ элемента $\{\partial v(t)/\partial t_1, \partial v(\tau_2)/\partial t_1\}$ области определения $D((PS)^*)$ сопряженного оператора $(PS)^*$.

Применяем лемму 4 из [4] в первых двух слагаемых выражения

$$-\int_{\mathcal{T}^\tau}\left(\frac{\partial v}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right]\right)dt - \int_{\tau_1}^{T_1}\left(\frac{\partial v}{\partial t_1}, e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right)\Big|_{t_2=\tau_2} dt_1 + \int_{\tau_1}^{T_1} e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=\tau_2} dt_1$$

и в силу равенств (19) при почти всех $\tau_2 \in]0, T_2[$ получаем

$$-\int_{\mathcal{T}^\tau}\left(\frac{\partial v}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right]\right)dt = \int_{\mathcal{T}^\tau}\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right], \frac{\partial v}{\partial t_1}\right)dt -$$

$$-\int_{\mathcal{T}^\tau}\left(\frac{\partial(e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t))}{\partial t_2}\frac{\partial v}{\partial t_1}, \frac{\partial v}{\partial t_1}\right)dt + \int_{\tau_1}^{T_1} e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=\tau_2} dt_1.$$

Отсюда при почти всех $\tau_2 \in]0, T_2[$ находим удвоенную вещественную часть

$$-2\,\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}^\tau}\left(\frac{\partial v}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}\left[e^{c\gamma(t)}A^{-1}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right]\right)dt = c\int_{\mathcal{T}^\tau} e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right|^2 dt -$$

$$-\int_{\mathcal{T}^\tau} e^{c\gamma(t)}\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial v}{\partial t_1}, \frac{\partial v}{\partial t_1}\right)dt + \int_{\tau_1}^{T_1} e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=\tau_2} dt_1. \qquad (20)$$

Интегрируем по частям один раз по t_1 от τ_1 до T_1 и согласно начальному условию $v\big|_{t_1=\tau_1} = 0$, $\tau_2 \le t_2 \le T_2$, из задачи Коши (16) имеем равенство

$$-2\,\mathrm{Re}\int_{\mathcal{T}^\tau} e^{c\gamma(t)}\left(v, \frac{\partial v}{\partial t_1}\right)dt = -\int_{\tau_2}^{T_2} e^{c\gamma(t)}|v|^2\big|_{t_1=T_1} dt_2 - c\int_{\mathcal{T}^\tau} e^{c\gamma(t)}|v|^2\, dt. \qquad (21)$$

В равенстве (18) все слагаемые левой части переносим в правую часть, к обеим частям прибавляем интеграл

$$\int_{\mathcal{T}^\tau} e^{c\gamma(t)}|v|^2\, dt$$

и ввиду соотношений (20), (21) при почти всех $\tau_2 \in]0, T_2[$ приходим к равенству

$$\int_{\mathcal{T}^\tau} e^{c\gamma(t)}|v|^2\, dt = \int_{\mathcal{T}^\tau} e^{c\gamma(t)}\Psi(v,v)dt - \int_{\tau_1}^{T_1} e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right|^2\Big|_{t_2=\tau_2} dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} e^{c\gamma(t)}|v|^2\big|_{t_1=T_1} dt_2, \qquad (22)$$

где полуторалинейная форма

$$\Psi(v,v) = -\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial v}{\partial t_1}, \frac{\partial v}{\partial t_1}\right) - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 A^{-1}(t)}{\partial t_2 \partial t_1}v, \frac{\partial v}{\partial t_1}\right) - c\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right|^2 + (1-c)|v|^2.$$

С помощью неравенств (4), (10) и элементарных оценок убеждаемся в неположительности формы

$$\Psi(v,v) \le (c_5 + c_7 - c)\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial v}{\partial t_1}\right|^2 + (c_7 + 1 - c)|v|^2 \le 0$$

при постоянной $c = c_{10} = c_7 + \max\{c_5, 1\}$. Поэтому из равенства (22), взятого при $c = c_{10}$, опуская неположительные слагаемые в его правой части, выводим, что $v = 0$, и, следовательно, ввиду уравнения из (16) функция $w = 0$ в $\mathcal{H}$. Лемма 2 доказывается аналогичным образом для значений индексов $i = 2,\ j = 1$. Лемма 2 доказана.

Теперь из леммы 2 выводится плотность в F множества значений $R(L)$ оператора L.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения леммы 2 и условие*

V. При всех $t \in \overline{\mathcal{T}}$ для операторов $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i$ существуют не зависящие от g, h функции $d_i(t) \ge 0,\ i = 1,2,$ такие, что $d_i(t) < 2,\ i = 1,2,$ и справедливо неравенство

$$\left|\left(\left(\partial A^{-1}(t)/\partial t_i\right)g, h\right)\right| \le d_i(t)\,|g|\,|A^{-1/2}(t)h|\ \forall g,\ h \in H,\ i = 1,2. \tag{23}$$

Тогда для каждого $\Phi = \{f, \varphi_1, \varphi_2\} \in F$ сильное решение $u \in E$ задачи Гурса (1), (2) существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|u\|_E^2 \le c_6 \|\Phi\|_F^2. \tag{24}$$

Доказательство. Итак, пусть некоторый элемент $\Phi = \{w, \psi_1, \psi_2\} \ne 0$ сопряженного пространства $F' = \mathcal{H} \times H_1 \times H_2$ ортогонален множеству $R(L)$, т. е.

$$\int_{\mathcal{T}} (\mathcal{L}(t)u, w)dt + (l_1 u, \psi_1)_1 + (l_2 u, \psi_2)_2 = 0\ \forall u \in D(L), \tag{25}$$

где $(\cdot,\cdot)_i$ – скалярные произведения в $H_i,\ i = 1,2.$ Полагая в этом равенстве $u \in D_0(L) = \{u \in D(L) : l_1 u = l_2 u = 0\},$ получаем равенство (11). Применение леммы 2 в тождестве (25) дает равенство $(l_1 u, \psi_1)_1 + (l_2 u, \psi_2)_2 = 0\ \forall u \in D(L).$ Благодаря условию согласования $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ в этом равенстве можно положить $u = A^{-1}(t)(\psi_1(t_1) + \psi_2(t_2) - \psi_1(0))$ и иметь

$$\sum_{i=1}^{2}\int_0^{T_i}\left[\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i}\psi_i(t_i), \frac{\partial \psi_i(t_i)}{\partial t_i}\right) + \left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial \psi_i(t_i)}{\partial t_i}\right|^2 + |\psi_i(t_i)|^2\right]\Big|_{t_j=0} dt_i = 0,\ j \ne i;\ i,\ j = 1,2.$$

В силу неравенства (23) отсюда получаем неравенство $\sum_{i=1}^{2}\int_0^{T_j}(1 - [d_i^2(t)/4])|\psi_i|^2 dt_i \le 0,\ j \ne i,$ из которого при $d_i(t) < 2$ следует, что $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0.$ Оценка (24) вытекает из неравенства (5). Теорема 2 доказана.

С помощью простейшего случая метода продолжения по параметру [7, 8] можно доказать

Следствие 2. В предположениях теоремы 2 для всех $f \in \mathcal{H},\ \varphi_i \in H_i,\ i = 1,2,$ существуют единственные непрерывно зависящие от f, φ_1 и φ_2 сильные решения $u \in E$ уравнения

$$\mathcal{L}(t)u(t) + B_1(t)\frac{\partial u(t)}{\partial t_1} + B_2(t)\frac{\partial u(t)}{\partial t_2} + B_0(t)u(t) = f(t)$$

при условиях (2), если ограничены операторы $B_k(t), B_0(t)A^{-1/2}(t) \in L_\infty(\mathcal{T}, \mathcal{L}(H)),\ k = 1,2.$

4. Частично характеристическая краевая задача. Требованиям теорем 1, 2 и следствия 2 удовлетворяет следующая частично характеристическая краевая задача для двумерного полного гиперболического дифференциального уравнения в частных производных при нестационарных граничных условиях третьего рода.

В области $G =]0,l[\times]0,T_1[\times]0,T_2[$ независимых переменных $x \in]0,l[$ и $t = \{t_1, t_2\} \in \mathcal{T} =]0,T_1[\times]0,T_2[$ задано уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t_2 \partial t_1} + \sum_{i=1}^{2} a_1(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t_i} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) +$$

$$+b_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t_1}+b_2(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t_2}+b_0(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+d_0(x,t)u(x,t)=f(x,t),\quad \{x,t\}\in G,$$

при зависящих от временной переменной t_k граничных условиях

$$\frac{\partial u(0,\tilde t)}{\partial x}-\beta_1(\tilde t)u(0,\tilde t)=0,\qquad \frac{\partial u(l,\tilde t)}{\partial x}+\beta_2(\tilde t)u(l,\tilde t)=0,$$

где $\tilde t=\{t_1,0\}$ или $\tilde t=\{0,t_2\}$, $t_k\in[0,T_k]$, $k=1,2,$ и краевых условиях Пикара

$$u(x,t_1,0)=\varphi_1(x,t_1),\ \ t_1\in[0,T_1],\qquad u(x,0,t_2)=\varphi_2(x,t_2),\ \ t_2\in[0,T_2],\quad x\in]0,l[,$$

с условиями согласования

$$\varphi_1(x,0)=\varphi_2(x,0),\quad x\in]0,l[.$$

Здесь на коэффициенты уравнения и граничных условий налагаются следующие требования:

$$a(x)\in C^{(1)}[0,l],\quad a(x)\ge a_0>0,\quad x\in[0,l];\quad a_1(x,t)\in C^{(1)}(\overline{G}),\quad a_1(0,t)=a_1(l,t)=0,\quad t\in\overline{\mathcal{T}};$$

$$b_i(x,t),\quad d_0(x,t)\in C(\overline{G}),\quad i=0,1,2;\ \ \beta_i(\tilde t)\in C^{(2)}[0,T_k],\quad \beta_i(\tilde t)\ge 0,\quad t_k\in[0,T_k],\quad i,k=1,2,$$

и частные производные $\left|\partial\beta_i(\tilde t)/\partial t_k\right|$, $t_k\in[0,T_k]$, $i,k=1,2,$ достаточно малы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бриш Н. И., Юрчук Н. И. Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 6. С. 1017.
2. Мотевич А. В. О единственности непрерывно дифференцируемых решений задачи Гурса для дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 1. С. 80.
3. Ломовцев Ф. Е., Мотевич А. В. Новые сглаживающие операторы задачи Гурса для гиперболического дифференциально-операторного уравнения с переменными областями определения // Докл. НАН Беларуси. 2011. № 4. С. 90.
4. Ломовцев Ф. Е. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешаемости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873.
5. Ломовцев Ф. Е. Дифференцирование и интегрирование по параметру неограниченных переменных операторов с переменными областями определения // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 1. С. 13.
6. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980.
8. Юрчук Н. И. Частично характеристическая граничная задача для одного вида уравнений в частных производных. II // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 3. С. 531.
9. Ходос С. П., Ломовцев Ф. Е. Дифференциально-операторные уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с переменными областями определения гладких операторов // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1153.

Поступила в редакцию 07.02.13.

Федор Егорович Ломовцев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики.

Антон Викторович Мотевич – аспирант кафедры математической кибернетики. Научный руководитель – Ф. Е. Ломовцев.