О ПЕРИОДИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

П.П. Вересович

УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Советская 104, 246019, Гомель, Беларусь
diffeq@gsu.by

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \frac{A_4(t)x^4 + A_3(t)x^3 + A_2(t)x^2 + A_1(t)x + A_0(t)}{B_2(t)x^2 + 2B_1(t)x + B_0(t)} \tag{1}$$

В дальнейшем $f := f(t)$, $\bar{f} := f(-t)$.

Лемма 1. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:*

а) $A_4 = -\bar{A}_4$:

б) $2A_4B_0^2 - A_3B_0B_1 + A_1B_1B_2 - 2A_0B_2^2 + B_1B_2\dot{B}_0 - 2B_0B_2\dot{B}_1 + B_0B_1\dot{B}_2 \equiv 0$;

в) $2A_4B_0B_1^2 - A_3B_1^3 + A_4B_0^2B_2 - 2A_3B_0B_1B_2 + A_2B_1^2B_2 - A_0B_2^3 + B_1B_2^2\dot{B}_0 - B_1^2B_2\dot{B}_2 -$
$-B_0B_2^2\dot{B}_1 + B_1^3\dot{B}_2 \equiv 0$;

г) $8A_4^3B_0\bar{B}_2^3 - 4A_3A_4^2B_1\bar{B}_2^3 - A_3^2A_4\bar{B}_2^3B_2 + 4A_2A_4^2\bar{B}_2^3B_2 - 8A_4^3\bar{B}_0B_2^3 - 4\bar{A}_3A_4^2\bar{B}_1B_2^3 +$
$+\bar{A}_3^2A_4\bar{B}_2B_2^3 + 4\bar{A}_2A_4^2\bar{B}_2B_2^3 - 2A_4\bar{B}_2^2B_2^3\dot{\bar{A}}_3 + 2A_4\bar{B}_2^3B_2^2\dot{A}_3 - 2A_3\bar{B}_2^3B_2^2\dot{A}_4 - 2\bar{A}_3\bar{B}_2^2B_2^3\dot{A}_4 -$
$-4A_4^2\bar{B}_2B_2^3\dot{\bar{B}}_1 - 4A_4^2\bar{B}_2^3B_2\dot{B}_1 + 4A_4^2\bar{B}_1B_2^3\dot{\bar{B}}_2 + 2\bar{B}_2^2B_2^3\dot{A}_4\dot{\bar{B}}_2 - A_4\bar{B}_2B_2^3\dot{\bar{B}}_2 + 4A_4^2B_1\bar{B}_2^3\dot{B}_2 +$
$+2\bar{B}_2^3B_2^2\dot{A}_4\dot{B}_2 + A_4\bar{B}_2^3B_2\dot{B}_2^2 + 2A_4\bar{B}_2^2B_2^3\ddot{\bar{B}}_2 - 2A_4\bar{B}_2^3B_2^2\ddot{B}_2 \equiv 0$;

д) *линейное уравнение, не разрешенное относительно производной*
$2A_4B_1^2B_2^2\dot{\beta} = 2B_1^2B_2^2\dot{A}_4\beta + A_4A_3^2B_1^2 + 4A_4^3B_0^2 - 4A_3A_4^2B_0B_1 - 2A_4B_1^2B_2\dot{A}_3 +$
$+2A_3B_1^2B_2\dot{A}_4 + 4A_4^2B_1B_2\dot{B}_0 - 4A_4^2B_0B_2\dot{B}_1 - 2B_1^2B_2\dot{A}_4\dot{B}_2 - A_4B_1^2\dot{B}_2^2 + 2A_4B_1^2B_2\ddot{B}_2$
имеет нечетное решение, определенное на всей числовой прямой.

Тогда отражающая функция [1, 2] уравнения (1) задается равенством

$$\frac{U(-t, F(t,x))}{V(-t, F(t,x))} = \frac{U(t,x)}{V(t,x)}, \quad \text{где} \;\; U(t,x) = a_0 + a_1x, \quad V(t,x) = b_0 + b_1x + x^2,$$

$$a_0 = -B_1, \quad a_1 = -B_2, \quad b_1 = \frac{A_3B_2\beta - \dot{B}_2}{2A_4}, \quad b_0 = \frac{B_0b_1 - B_0}{B_2}.$$

Теорема 1. *Пусть для 2ω-периодических коэффициентов уравнения (1) выполнены все условия леммы. Тогда отражающая функция этого уравнения 2ω-периодична, а все его решения, продолжимые на $[-2\omega, 2\omega]$, являются 4ω-периодическими.*

Литература

1. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн.: Университетское, 1986.

2. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.