БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Журавков М. А. Актуальные научные проблемы современной геомеханики для условий Республики Беларусь // Механика машин, механизмов и материалов. 2007. № 1. С. 94–99.
2. Zhuravkov M. A., Konovalov O. L., Krupoderov A. V., Kushunin A. A. Modelling of connected geomechanical, hydromechanical and gasdynamic processes for potash minerals deposits // Mine Planning and Equipment Selection. MPES 2009. Pub. by Balkema/Rotterdam/ Brookfield. 2009. P. 1150–1159.
3. Журавков М. А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Минск, 2002.
4. Хорошун Л. П. К теории насыщенных пористых сред // Прикл. механика. 1976. № 12 б. С. 35–41.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л., 1963.

Поступила в редакцию 16.04.13.

Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор, первый проректор БГУ, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики.

Валерий Алексеевич Савенков – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

УДК 517.9

Т. С. АВТУШКО, Н. В. ЛАЗАКОВИЧ, А. Ю. РУСЕЦКИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ

Рассматривается задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} Y''(t)+a'(t)Y'(t)+\sigma'(t)Y(t)=0, \\ Y(0)=c_1, \\ Y'(0)=c_2 \end{cases}$$

в алгебре мнемофункций. Здесь $t\in \boldsymbol{T}=[0,b]$, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$, $\sigma, a:\boldsymbol{T}\to\mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, σ', a' – их обобщенные производные. Исследуются вопросы существования и единственности решений интегральных уравнений, к которым сходятся ассоциированные решения соответствующего исходной задаче уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций. Вводятся определения ассоциированных фундаментальных матриц, изучаются их свойства. Находятся ассоциированные решения задачи через ассоциированные фундаментальные матрицы. Рассматривается сопряженная задача. Выписывается связь ассоциированных фундаментальных матриц исходной задачи и сопряженной.

Ключевые слова: линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка; алгебра мнемофункций; ассоциированные решения; ассоциированные фундаментальные матрицы; сопряженная задача; связь ассоциированных фундаментальных матриц исходной задачи и сопряженной.

Cauchy problem for the homogeneous linear differential equation of second order

$$\begin{cases} Y''(t)+a'(t)Y'(t)+\sigma'(t)Y(t)=0, \\ Y(0)=c_1, \\ Y'(0)=c_2 \end{cases}$$

in algebra mnemofunctions is studied. Here $t\in \boldsymbol{T}=[0,b]$, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$, $\sigma, a:\boldsymbol{T}\to\mathbb{R}$ – right-continuous function of bounded variation, σ', a' – their generalized derivatives. Questions of existence of the solutions of integral equations which associated solutions corresponding to the initial problem of the equation in differentials in the algebra mnemofunctions converge to and their uniqueness are researched. Definitions of associated fundamental matrices are introduced, their properties are studied. Associated solutions of the problem through corresponding associated fundamental matrices are found. We consider the adjoint problem. The bond between the associated fundamental matrices of the original problem and the conjugate is issued.

Key words: the homogeneous linear differential equation of second order; the algebra mnemofunctions; associated solutions; associated fundamental matrices; the adjoint problem; the bond between associated fundamental matrix of the original problem and the conjugate.

В работе рассматривается задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} Y''(t)+a'(t)Y'(t)+\sigma'(t)Y(t)=0, \\ Y(0)=c_1, \\ Y'(0)=c_2, \end{cases} \tag{1}$$

которая в матричном виде может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} X'(t)=L'(t)X(t), \\ X(0)=X_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $t \in \boldsymbol{T} = [0,b]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma, a : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, σ', a' – их обобщенные производные, $X_1(t) = Y(t)$, $X_2(t) = Y'(t)$, $X(t) = (X_1(t), X_2(t))^T$, $X_0 = (c_1, c_2)^T$, $L'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma'(t) & -a'(t) \end{pmatrix}$.

Рассматриваемая задача является некорректной с точки зрения классической теории дифференциальных уравнений, поскольку содержит операцию произведения обобщенных функций. Изучением такого рода задач занимались многие авторы (см., например, [1–4]).

В данной работе задача Коши (1) исследуется в прямом произведении алгебр мнемофункций [5]. Подобный подход позволяет с единых позиций охватить аналогичные результаты из [1–4] и может быть эффективно использован при численном моделировании решений задач типа (1). Аналогичной задачей занимались и ранее, например, в работах [5, 6]. В данной статье мы исследуем ассоциированные фундаментальные матрицы, их свойства, находим ассоциированные решения задачи (1) через ассоциированные фундаментальные матрицы, ассоциированные решения сопряженной задачи через ассоциированные фундаментальные матрицы сопряженной задачи, связь ассоциированных фундаментальных матриц исходной задачи и сопряженной.

Напомним некоторые понятия алгебры мнемофункций [5].

Пусть $\mathbb{R}$ – вещественная прямая. На множестве всех последовательностей элементов из $\mathbb{R}$ введем отношение эквивалентности

$$(x_n) \sim (y_n), \text{ если } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0\ x_n = y_n.$$

Обобщенным числом будем называть класс эквивалентности $\tilde{x} = [(x_n)]$, *расширенной вещественной прямой* $\widetilde{\mathbb{R}}$ – множество обобщенных чисел. Очевидно, что $\widetilde{\mathbb{R}}$ – алгебра с покоординатными операциями сложения и умножения. Аналогично строится расширение $\tilde{T}$ отрезка $\boldsymbol{T}$.

На множестве последовательностей бесконечно дифференцируемых функций введем отношение эквивалентности

$$(f_n) \sim (g_n), \quad \text{если } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = g_n(x).$$

Мнемофункцией $\tilde{f}$ будем называть класс эквивалентности $[(f_n(x))]$, множество всех мнемофункций $G(\mathbb{R})$ – *алгеброй мнемофункций* с покоординатными операциями сложения и умножения. Аналогично определяется $G(\boldsymbol{T})$ для отрезка $\boldsymbol{T}$. Через $G(\widetilde{\mathbb{R}})$ обозначим алгебру мнемофункций вида $\tilde{f}(\tilde{x}) = [(f_n(x_n))]$, где $\tilde{x} = [(x_n)] \in \widetilde{\mathbb{R}}$, а $[(f_n(x))] \in G(\mathbb{R})\ \forall x \in \mathbb{R}$, через $G^2(\tilde{T})$ – *прямое произведение* $G(\tilde{T}) \times G(\tilde{T})$.

Обобщенным дифференциалом в алгебре $G^2(\tilde{T})$ называется

$$d_{\tilde{h}} \tilde{f}(\tilde{x}) = [(f_n(x + h_n) - f_n(x))],\ \tilde{x} = [(x)] \in \tilde{T},\ \tilde{h} \in H,\ \tilde{x} + \tilde{h} \in \tilde{T}.$$

Здесь

$$H = \left\{ \tilde{h} \in \widetilde{\mathbb{R}} : \tilde{h} = [(h_n)],\ h_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{n \to \infty} h_n = 0 \right\}.$$

Говорят, что *мнемофункция* $\tilde{f} = [(f_n)]$ *ассоциирует* функцию f из $D'(\boldsymbol{T})$, если последовательность (f_n) при $n \to \infty$ сходится к f в $D'(\boldsymbol{T})$.

Задаче Коши (2) в алгебре $G^2(\tilde{T})$ поставим в соответствие задачу

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}} \tilde{X}(\tilde{t}) - d_{\tilde{h}} \tilde{L}(\tilde{t}) \tilde{X}(\tilde{t}) = \tilde{0}, \tilde{t} \in \tilde{T}, \\ \tilde{X}\big|_{[\tilde{0}, \tilde{h})} = \tilde{X}_0(\tilde{t}), \end{cases} \tag{3}$$

где мнемофункции $\tilde{\sigma}$, $\tilde{a}$, $\tilde{X}_0^1$, $\tilde{X}_0^2$ ассоциируют соответственно σ, a, c_1 и c_2.

На уровне представителей задача Коши (3) примет вид

$$\begin{cases} X_n(t + h_n) - X_n(t) = [L_n(t + h_n) - L_n(t)] X_n(t), t \in \boldsymbol{T}, \\ X_n(t)\big|_{[0, h_n)} = X_{n0}(t), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$X_n(t) = (X_n^1(t), X_n^2(t))^T,\ X_{n0}(t) = (X_{n0}^1(t), X_{n0}^2(t))^T,\ L_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\sigma_n(t) & -a_n(t) \end{pmatrix},$$

$$a_n(t) = (a * \rho_n^1)(t),\ \rho_n^1(t) = n\rho(nt), \tag{5}$$

$$\sigma_n(t)=\left(\sigma*\rho_n^2\right)(t),\ \rho_n^2(t)=\gamma(n)\rho(\gamma(n)t),\ \gamma(n)\to\infty \text{ при } n\to\infty,$$

$$\rho\geq 0,\ \rho\in C^\infty(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}(\rho)\subseteq[0,1],\ \int_0^1\rho(s)\,ds=1.$$

Определим норму $Y\in\mathbb{R}^n$ и $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\|Y\|=\sum_{i=1}^n|Y_i|,\ \|X\|=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left|X_{ij}\right|.$$

Теорема 1 [6]. *Решение задачи Коши (3) в $G^2(\tilde{T})$ существует и единственно тогда и только тогда, когда для любых представителей (L_n), (X_{n0}), (h_n) выполняются следующие условия:*

$$X_{n0}^j(t)\in C^\infty(\boldsymbol{T}),\ j=1,2, \tag{6}$$

и для $l=0,1,\ldots$

$$\left\|\frac{d^l}{dt^l}X_{n0}(h_n-s)-\frac{d^l}{dt^l}X_{n0}(s)-\frac{d^l}{dt^l}\left[\left[L_n(h_n-s)-L_n(s)\right]X_{n0}(s)\right]\right\|\xrightarrow{s\to+0}0. \tag{7}$$

Из теоремы 1 статьи [5] вытекает

Следствие 1. Пусть $\sigma, a:\boldsymbol{T}\to\mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, $X_n(t),\ t\in\boldsymbol{T}$ – решение задачи Коши (4) и

$$\sup_{t\in[0,h_n)}\left\|X_{n0}(t)-X_0\right\|\xrightarrow[n\to\infty,\,h_n\to 0]{}0. \tag{8}$$

Тогда при $n\to\infty,\ h_n\to 0,\ \gamma(n)\to\infty$

$$\int_{\boldsymbol{T}}\left\|X_n(t)-X(t)\right\|dt\to 0,$$

где $X(t)$ – решение системы

$$X(t)=X_0+\int_0^t dL^c(s)X(s)+\sum_{\mu_l\leq t}\left[\varphi_l\left(X(\mu_l-),1,\Delta L(\mu_l)\right)-\varphi_l\left(X(\mu_l-),0,\Delta L(\mu_l)\right)\right], \tag{9}$$

$\varphi_l:\mathbb{R}^2\times[0,1]\times\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^2$ – решение вспомогательной системы уравнений

$$\varphi_l\left(X(\mu_l-),u,\Delta L(\mu_l)\right)=X(\mu_l-)+\int_{(0,u]}d\eta(s)\varphi_l\left(X(\mu_l-),s-,\Delta L(\mu_l)\right). \tag{10}$$

Здесь $\varphi_l(t,u,g)=\left(\varphi_{1l}(t,u,g),\varphi_{2l}(t,u,g)\right)^T$, $L^c(t)=\begin{pmatrix}0 & t\\ -\sigma^c(t) & -a^c(t)\end{pmatrix}$,

$$\Delta L(t)=L(t)-L(t-),\ \Delta L(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\Delta\sigma(t) & -\Delta a(t)\end{pmatrix},$$

μ_l – точки разрыва $L(t)$, $l\in\mathbb{N}$,

$\eta(s)=\left(\eta^{ij}(s)\right)_{i,j=1,2}$, причем $\eta^{ij}(s)=\Delta L^{ij}(\mu_l)s$, если $h_n=o\left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)$ или $h_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, и $\eta^{ij}(s)=\Delta L^{ij}(\mu_l)H(s-1)$, если $\frac{1}{n}=o(h_n)$ или $\frac{1}{\gamma(n)}=o(h_n)$, $H(s)$ – функция Хевисайда.

Будем говорить, что *функция $X(t)=\left(X_1(t),X_2(t)\right)^T$ является ассоциированным решением системы (3), если существуют представители мнемофункций $\tilde{\sigma}$, $\tilde{a}$, $\tilde{X}_0^1$, $\tilde{X}_0^2$, для которых решение задачи (4) $X_n(t)=\left(X_n^1(t),\ X_n^2(t)\right)^T$ покоординатно сходится к $X(t)=\left(X_1(t),\ X_2(t)\right)^T$ в $D'(\boldsymbol{T})$ и* $\left[\left(X_n^j(t)\right)\right]\in G(\tilde{T}),\ j=1,2.$

Следствие 2. Пусть σ, $a:\boldsymbol{T}\to\mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации и выполняются условия (6), (7), (8), тогда ассоциированные решения задачи Коши (3) являются решениями уравнений (9) – (10).

Покажем, что системы (9) – (10) имеют единственные решения в пространстве непрерывных справа функций ограниченной вариации. Для этого нам понадобится

Лемма 1 [7, с. 393]. *Пусть* $\Psi(x,t,u)$ *– m-мерная вектор-функция,* $F(x,t)$ *– матричная функция размера* $m\times k$. *Допустим, что* $\Psi(x,t,u)$, $F(x,t)$ *– борелевские функции по* (x,t). *Пусть для любых* $x,y\in\mathbb{R}^m$, $u\in\mathbb{R}^k$, $t\in[0,b]$ *эти функции удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста. Тогда для любого начального условия* $X(0-)=X_0$ *существует единственное решение уравнения*

$$X(t)=X_0+\int_0^t F(X(s),s)\,d\mu^c(s)+\sum_{\tau\le t}\Psi(X(\tau-),\tau,\Delta\mu(\tau)), \quad (11)$$

каждая координата которого является непрерывной справа функцией ограниченной вариации.

Здесь $\mu(dt)=\mu^c(dt)+\mu^d(dt)$ *– векторная мера, такая, что* $\|\mu\|([0,b])<\infty$, $\mu^c(dt)$ *– непрерывная компонента,* $\mu^d(dt)$ *– дискретная компонента,* $\mu(t)=\mu(\{[0,t]\})$ *– k-мерная непрерывная справа вектор-функция ограниченной вариации, порождающая меру,* $\|\cdot\|$ *означает любую из матричных или векторных норм.*

Если положить

$$X(t)=\begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\\X_3(t)\\X_4(t)\end{pmatrix},\ X_0=\begin{pmatrix}X_1(0)\\X_2(0)\\0\\0\end{pmatrix},\ \mu^c(t)=\begin{pmatrix}0\\t\\-\sigma^c(t)\\-a^c(t)\end{pmatrix},\ \Delta\mu(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\-\Delta\sigma(t)\\-\Delta a(t)\end{pmatrix},$$

$$F(x,t)=\begin{pmatrix}x_1&x_2&0&0\\0&0&x_1&x_2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \Psi(x,t,u)=F(x,t)u,\quad t\in\boldsymbol{T},\ u\in\mathbb{R}^4,\ x\in\mathbb{R}^4,$$

то системы уравнений (9) перепишутся в виде систем (11). Очевидно, условия Липшица и линейного роста для функций $F(x,t)$ и $\Psi(x,t,u)$ выполняются. Таким образом, лемма 1 для уравнений (9) применима и, используя ее, получим

Утверждение 1. Пусть функции $\sigma,\ a:\boldsymbol{T}\to\mathbb{R}$ непрерывны справа и имеют ограниченные вариации, тогда для любых начальных условий существуют единственные решения систем (9) – (10), каждые координаты которых являются непрерывными справа функциями ограниченной вариации.

Введем следующие матрицы ΔL^i, $i=\overline{1,4}$, положив по определению

$$1.\ \Delta L^1(\mu_l)=\begin{pmatrix}0&0\\-\Delta\sigma(\mu_l)&-\Delta a(\mu_l)\end{pmatrix},$$

$$2.\ \Delta L^2(\mu_l)=\begin{pmatrix}0&0\\-\Delta\sigma(\mu_l)&e^{-\Delta a(\mu_l)}-1\end{pmatrix},$$

$$3.\ \Delta L^3(\mu_l)=\begin{pmatrix}0&0\\-\Delta\sigma(\mu_l)(1-\Delta a(\mu_l))&-\Delta a(\mu_l)\end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$4.\ \Delta L^4(\mu_l)=\begin{pmatrix}0&0\\\dfrac{\Delta\sigma(\mu_l)}{\Delta a(\mu_l)}\left(e^{-\Delta a(\mu_l)}-1\right)&e^{-\Delta a(\mu_l)}-1\end{pmatrix},\ \Delta a(\mu_l)\ne0,$$

$$\Delta L^4(\mu_l)=\begin{pmatrix}0&0\\-\Delta\sigma(\mu_l)&0\end{pmatrix},\ \Delta a(\mu_l)=0.$$

Из теоремы 1 и следствия 1 получим

Теорема 2. *Пусть* $\sigma,\ a:\boldsymbol{T}\to\mathbb{R}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации и выполняются условия (6), (7), (8), тогда ассоциированными решениями задачи Коши (3) являются решения следующих интегральных уравнений:*

$$X^i(t) = X^i(0) + \int_0^t dL^c(s) X^i(s) + \sum_{\mu_l \le t} \Delta L^i(\mu_l) X^i(\mu_l -), \ t \in \boldsymbol{T}, \ i = \overline{1,4}, \tag{13}$$

где ΔL^i *из представлений (12) и при* $n \to \infty, \ h_n \to 0, \ \gamma(n) \to \infty$

$$i = 1, \ \textit{если} \ \frac{1}{n} = o(h_n) \ \textit{и} \ \frac{1}{\gamma(n)} = o(h_n);$$

$$i = 2, \ \textit{если} \ \frac{1}{n} = o(h_n) \ \textit{и} \ h_n = o\left(\frac{1}{\gamma(n)}\right);$$

$$i = 3, \ \textit{если} \ h_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \ \textit{и} \ \frac{1}{\gamma(n)} = o(h_n);$$

$$i = 4, \ \textit{если} \ h_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \ \textit{и} \ h_n = o\left(\frac{1}{\gamma(n)}\right).$$

Теорема 3. *Первые координаты вектор-решений* $X^i(t), \ t \in \boldsymbol{T}, \ i = \overline{1,4},$ *систем (13) абсолютно непрерывны.*

Доказательство. Вектор $\Delta L^i(u) X^i(u-), \ u \in \boldsymbol{T}$ в системах (13) для любой из четырех возможных матриц $\Delta L^i(u)$ из представлений (12) равен

$$\Delta L^i(u) X^i(u-) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L^i_{21}(u) X^i_1(u-) + \Delta L^i_{22}(u) X^i_2(u-) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первое уравнение систем (13) имеет вид

$$X^i_1(t) = X^i_1(0) + \int_0^t X^i_2(s) ds, \ i = \overline{1,4}. \tag{14}$$

Поскольку $X^i_2(t)$ интегрируемые, а в уравнениях (14) присутствует только интеграл Лебега с переменным верхним пределом, который абсолютно непрерывен, заключаем, что $X^i_1(t), \ i = \overline{1,4},$ абсолютно непрерывны.

Введем матрицы – функции $B^i(t,r)$ как решения интегральных уравнений

$$B^i(t,r) = E + \int_r^t d^c L(s) B^i(s,r) + \sum_{r < \mu_l \le t} \Delta L^i(\mu_l) B^i(\mu_l -, r), \ r, t \in \boldsymbol{T}, \tag{15}$$

где $\Delta L^i, \ i = \overline{1,4},$ – матрицы из представлений (12).

Матрицы $B^i(t,r)$ называются *ассоциированными фундаментальными матрицами* соответствующих интегральных уравнений (13), $i = \overline{1,4}.$

Существование и единственность решений интегральных уравнений (15) доказывается с помощью леммы 1.

Теорема 4. *Ассоциированные решения интегральных уравнений (13) представимы в виде*

$$X^i(t) = B^i(t,0) X^i(0), \ \forall t \in \boldsymbol{T}, \ i = \overline{1,4}. \tag{16}$$

Равенства (16) в теореме 4 получаются умножением формулы (15) справа на $X^i(0)$.

Представим L^i следующим образом (см., например, [8, с. 206]):

$$L^i(t) = L^c(t) + \Delta L^i(t), \ t \in \boldsymbol{T}, \ i = \overline{1,4}. \tag{17}$$

Тогда уравнения (13) и (15) запишутся в виде

$$X^i(t) = X^i(0) + \int_0^t dL^i(s) X^i(s), \tag{18}$$

$$B^i(t,r) = E + \int_r^t dL^i(s) B^i(s,r), \quad r, t \in \boldsymbol{T}, \ i = \overline{1,4}, \tag{19}$$

и интегралы в (18) и (19) будут пониматься в смысле неклассического интеграла Римана – Стилтьеса (см., например, [4, с. 48]).

Утверждение 2. Ассоциированные фундаментальные матрицы $B^i(t,r), \ i = \overline{1,4},$ имеют следующие свойства:

1. Для любых $t_1, t_2, t_3 \in \boldsymbol{T}$: $B^i(t_3,t_2) B^i(t_2,t_1) = B^i(t_3,t_1), \ i = \overline{1,4}.$

2. Для любых $t_1, t_2 \in \boldsymbol{T} : B^i(t_1, t_2) B^i(t_2, t_1) = E,\ i = \overline{1,4}.$

3. $B^i(t,r) = [E + \Delta L^i(t)] B^i(t-, r), \quad \forall\, r, t \in \boldsymbol{T},\ i = \overline{1,4}.$

4. Если существует $\left[E + \Delta L^i(t)\right]^{-1}, \quad \forall\, t \in \boldsymbol{T},\ i = \overline{1,4},$ то $B^i(t,r) = B^i(t, r-)\left[E + \Delta L^i(t)\right]^{-1},$ $\forall\, r, t \in \boldsymbol{T},\ i = \overline{1,4}.$

5. $B^i(t,r),\ i = \overline{1,4},$ – непрерывные справа матрицы-функции ограниченной вариации по переменным t и r из $\boldsymbol{T}$.

Доказательство утверждения 2 проводится аналогично доказательству теоремы 3.2 из монографии [4, с. 57].

Рассмотрим сопряженную задачу к задаче Коши (2):

$$\begin{cases} Z'(t) = -\left(L'(t)\right)^T Z(t), \\ Z(0) = Z_0, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$t \in \boldsymbol{T},\ X_1(t) = Y(t),\ X_2(t) = Y'(t),\ Z(t) = (X_2(t), X_1(t))^T,\ Z_0 = (c_2, c_1)^T,$$

$$\left(L'(t)\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma'(t) \\ 1 & -a'(t) \end{pmatrix}.$$

В алгебре мнемофункций задаче Коши (20) поставим в соответствие задачу

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}} \tilde{Z}(\tilde{t}) + d_{\tilde{h}} \tilde{L}^T(\tilde{t}) \tilde{Z}(\tilde{t}) = \tilde{0},\ \tilde{t} \in \tilde{\boldsymbol{T}}, \\ \tilde{Z}\big|_{[\tilde{0}, \tilde{h})} = \tilde{Z}_0(\tilde{t}), \end{cases} \tag{21}$$

которая на уровне представителей будет иметь вид

$$\begin{cases} Z_n(t + h_n) - Z_n(t) = -\left[L_n(t + h_n) - L_n(t)\right]^T Z_n(t),\ t \in \boldsymbol{T}, \\ Z_n(t)\big|_{[0, h_n)} = Z_{n0}(t), \end{cases}$$

$$Z_n(t) = \left(X_n^2(t), X_n^1(t)\right)^T,\ Z_{n0}(t) = \left(X_{n0}^2(t), X_{n0}^1(t)\right)^T,\ \left(L_n(t)\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_n(t) \\ t & -a_n(t) \end{pmatrix},$$

$a_n(t),\ \sigma_n(t)$ определяются в (5).

Решение задачи Коши (21) в $G^2(\tilde{T})$ при выполнении подобных условий (6), (7) для $Z_{n0}(t)$ и $\left(L_n(t)\right)^T$ существует и единственно. Доказательство этого факта проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Используя рассуждения, приведенные выше, можно показать, что ассоциированными решениями задачи Коши (21) будут решения интегральных уравнений:

$$Z^i(t) = Z_0 - \int_0^t d(L^i)^T(s) Z^i(s), \quad t \in \boldsymbol{T},\ i = \overline{1,4}, \tag{22}$$

где матрицы L^i задаются формулой (17).

Каждое i-е интегральное уравнение (22), $i = \overline{1,4},$ будет сопряженным к i-му интегральному уравнению (18).

Интегральные уравнения (22), $i = \overline{1,4},$ перепишем следующим образом:

$$\tilde{Z}^i(t) = \tilde{Z}_0 - \int_0^t \tilde{Z}^i(s) dL^i(s),\ t \in \boldsymbol{T},\ i = \overline{1,4}, \tag{23}$$

$$\tilde{Z}^i(t) = \tilde{Z}^i(t)^T = \left(X_2^i(t), X_1^i(t)\right), \quad \tilde{Z}_0 = (c_2, c_1).$$

Пусть $\tilde{B}^i(t,r),\ i = \overline{1,4},$ – ассоциированные фундаментальные матрицы уравнений (23). Они задаются как решения интегральных уравнений

$$\tilde{B}^i(t,r) = E - \int_r^t \tilde{B}^i(s,r) dL^i(s),\ t, r \in \boldsymbol{T},\ i = \overline{1,4}.$$

Используя методы доказательства формулы (5.7) в монографии [4, с. 66], получим

Утверждение 3. Пусть $B^i(t,r)$ и $\tilde{B}^i(t,r),\ r, t \in \boldsymbol{T},\ i = \overline{1,4},$ – ассоциированные фундаментальные матрицы уравнений (18) и (23) соответственно, тогда имеет место равенство

$$\tilde{B}^i(t,r) = B^i(r,t) - \sum_{r < s \le t} \tilde{B}^i(s-, r)\left[\Delta L^i(s)\right]^2 B^i(s-, t),\ i = \overline{1,4},\ r, t \in \boldsymbol{T}.$$

Замечание. Если $\left[\Delta L^i\left(s\right)\right]^2 = 0$, то $\tilde{B}^1\left(t,r\right) = \tilde{B}^i\left(t,r\right) = B^i\left(r,t\right) = B^1\left(r,t\right)$, $\forall i = \overline{1,4}$, т. е. при $\left[\Delta L^i\left(s\right)\right]^2 = 0$, $\forall i = \overline{1,4}$, все $B^i\left(r,t\right)$, $i = \overline{1,4}$, равны $B^1\left(r,t\right)$, все $\tilde{B}^i\left(t,r\right)$, $i = \overline{1,4}$, равны $\tilde{B}^1\left(t,r\right)$ и $B^1\left(r,t\right)$ по второй переменной является ассоциированной фундаментальной матрицей сопряженной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Das P. S., Sharma R. R. Existence and stability of measure differential equations // Czech. Math. J. 1972. Vol. 22. № 1. P. 145–158.
2. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М., 1976. С. 311.
3. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М., 1991. С. 256.
4. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В., Власій О. О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Дрогобич, 2011. С. 301.
5. Лазакович Н. В., Яблонский О. Л., Хмызов А. К. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55. № 2. С. 5–9.
6. Розин Е. Б. Уравнения в дифференциалах, содержащие обобщенные случайные процессы Леви: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Минск, 2005. С. 22.
7. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М., 2005. С. 429.
8. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1974. С. 480.

Поступила в редакцию 21.01.13.

Татьяна Сергеевна Автушко – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – Н. В. Лазакович.
Николай Викторович Лазакович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа.
Артем Юрьевич Русецкий – студент 5-го курса механико-математического факультета.

УДК 517.925

В. В. БЛАШКЕВИЧ

ГЛОБАЛЬНОЕ КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ДВУМЕРНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Определена размерность базиса невырожденных абсолютных инвариантов рациональных дискретных динамических систем в проективном пространстве. Проведено глобальное качественное исследование слоений, определяемых на проективном пространстве $\mathbf{R}P^2$ дробно-линейными дискретными динамическими системами. Доказано отсутствие изолированных регулярных компактных инвариантных кривых дробно-линейных дискретных динамических систем в каждой аффинной карте атласа проективного пространства $\mathbf{R}P^2$. Получено аналитическое представление невырожденных абсолютных инвариантов вещественных дробно-линейных дискретных динамических систем. В зависимости от невырожденных абсолютных инвариантов построены портреты дробно-линейных дискретных динамических систем на проективном пространстве $\mathbf{R}P^2$ и проведена их топологическая классификация. Всего получено 8 топологических типов расположения инвариантных слоений дробно-линейных дискретных динамических систем на проективном пространстве $\mathbf{R}P^2$.

Ключевые слова: дискретная динамическая система; топологическая эквивалентность; проективное пространство.

Dimension of the basis of nondegenerate absolute invariants of rational discrete dynamic systems in the projective space is defined. Global qualitative research of the foliations, defined on the projective space $\mathbf{R}P^2$ by linear-fractional discrete dynamical systems, is carried out. Absence of the isolated regular compact invariant curve of linear-fractional discrete dynamic systems in each affine card of the atlas of the projective space $\mathbf{R}P^2$ is proved. Analytical representation of nondegenerate absolute invariants of real linear-fractional discrete dynamic systems is received. Depending on nondegenerate absolute invariants, the portraits of is fractional-linear discrete dynamic systems on the projective space $\mathbf{R}P^2$ are constructed and their topological classification is spent. In total it is received 8 topological types of an arrangement of invariant foliations of linear-fractional discrete dynamic systems on the projective space $\mathbf{R}P^2$.

Key words: discrete dynamic system; topological equivalence; projective space.

1. Постановка задачи. Глобальное качественное исследование слоений, определяемых двумерными автономными полиномиальными обыкновенными дифференциальными системами, берет свое начало из работ А. Пуанкаре [1] и достаточно хорошо изучено (см., например, [2–4]). В данной статье, основываясь на результатах работы [3], будем проводить глобальное качественное исследование слоений, определяемых на проективном пространстве $\mathbf{R}P^2$ дробно-линейными дискретными динамическими системами. Отметим, что использованный нами подход можно применять и при исследовании других классов двумерных вещественных рациональных дискретных динамических систем.

2. Абсолютные инварианты рациональных дискретных динамических систем. Рассмотрим рациональную дискретную динамическую систему $\left(R_m\right)$, являющуюся вполне разрешимой [5] при $m > 1$, образованную бирациональными отображениями (рациональными отображениями, имеющими рациональными себе обратные)