МЕТОД РАЦИОНАЛИЗИРУЮЩИХ ПОДСТАНОВОК ВО ВТУЗОВСКОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Г.Л. Бахмат

БНТУ, пр-т Независимости 65, 220027, Минск, Беларусь

Исторически сложилось так, что изучение студентами рационализирующих подстановок, как правило, проводится в курсе математического анализа в разделе «Интегрирование», а в других разделах, в частности, при вычислении пределов последовательностей и функций, не находит должного применения. Вместе с тем использование метода рационализации оказывается весьма эффективным при вычислении пределов. При этом в качестве рационализирующих постановок применяются либо аналогичные подстановки, рационализирующие подинтегральное выражение, либо их модификации. Это, например, подстановки, рационализирующие дробно-линейные иррациональные выражения, подстановки Эйлера, универсальная тригонометрическая подстановки и т.д. Ввиду многообразия рационализирующих подстановок ограничимся приведенными выше и рассмотрим их применение при вычислении пределов конкретных функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+ax}}{x}=\left|t=\sqrt[mn]{1+ax}\right|=\frac{1}{a}\lim_{t\to 1}\frac{t^n-t^m}{t^{mn}-1}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right), \quad \mathbf{(1)}$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}=\left|t=\underset{n\in N}{\sqrt{1+x^2+}}+x\right|=\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^n-t^{-n}\right)2t}{t^2-1}=2n, \quad (2)$$

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}3\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\left|t=\operatorname{tg}\alpha\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t\left(t^2+5\right)}{1-3t^2}=-3, \quad \mathbf{(3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\left|t=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}, \quad (4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{(1+x)^n}-1}{x}=\left|t=\sqrt[m]{1+x}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\frac{n}{m}, \quad (5)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)^p+\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^p}{n^p}=\left|t=\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^{2p}+(t+1)^{2p}}{\left(t^2+1\right)^p}=2^p. \quad (6)$$

На кафедре «Высшая математика №3» БНТУ проведена систематизация рационализирующих подстановок, рекомендованных к использованию на практических занятиях по теме «Вычисление пределов». Применение этого метода достаточно просто усваивается студентами и подготавливает их к изучению аналогичных методов интегрирования.