ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО – ДУГУНДЖИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С ФИЛЬТРАЦИЯМИ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ $\mathcal{N}$-ANE-ПРОСТРАНСТВ

З.Н. Силаева

Белгосуниверситет, механико-математический факультет,

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

szn2006@yandex.ru

Под *пространством с фильтрацией*, или $\mathcal{N}$*-пространством*, мы будем понимать метрическое пространство X, в котором выделена последовательность замкнутых подмножеств $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$, такая, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$ (т. н. *фильтрация*). Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств X и Y будем называть $\mathcal{N}$*-отображением*, если $f(X_i) \subseteq Y_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Ясно, что при этом возникает категория $\mathcal{N}$-пространств и $\mathcal{N}$-отображений.

Будем говорить, что семейство $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ подмножеств метрического пространства Y является *равностепенно локально* n*-связным* ($\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A} \in$ equi-LC^n), $n = 0, 1, \ldots$, если $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha = Y$ и для любой окрестности U произвольной точки $y \in Y$ существует окрестность $V \subset U$, $y \in V$, такая, что любое непрерывное отображение $\varphi\colon S^k \to Y_m \cap V$, $k = \overline{0, n}$, непрерывно продолжается до отображения $\overline{\varphi}\colon B^{k+1} \to Y_m \cap U$. Ясно, что из условия $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A} \in$ equi-LC^n следует, что $Y_\alpha \in \mathrm{LC}^n$ для любого $\alpha \in A$.

Одним из важных вопросов, связанных с задачей продолжения $\mathcal{N}$-отображений, является вопрос о том, в какой степени связностные свойства элементов фильтрации влияют на возможность продолжения $\mathcal{N}$-отображений. Ответом на этот вопрос является следующее обобщение известной теоремы Куратовского – Дугунджи на случай метрических пространств с фильтрациями.

Теорема 1. *Пусть* A *— замкнутое подпространство метрического* $\mathcal{N}$*-пространства* X, $\dim(X \setminus A) \leqslant n+1$, Y *— метрическое* $\mathcal{N}$*-пространство с фильтрацией* $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in$ $\in \mathrm{equi\text{-}LC}^n$, $n \geqslant 0$. *Тогда для любого* $\mathcal{N}$*-отображения* $f\colon A \to Y$ *существует такая окрестность* U *множества* A *в* X, *что отображение* f *имеет* $\mathcal{N}$*-продолжение* $\overline{f}\colon U \to Y$. *Если же, дополнительно,* $Y_i \in \mathrm{C}^n$ *для любого* $i \in \mathbb{N}$, *то отображение* f *имеет* $\mathcal{N}$*-продолжение* $\overline{f}\colon X \to Y$.

Требование $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{equi\text{-}LC}^n$ является существенным для пространств со счетной фильтрацией. Имеется пример $\mathcal{N}$-пространства Y, все элементы фильтрации которого являются LC^n-пространствами, но при этом существует $\mathcal{N}$-отображение $f\colon A \to Y$, не имеющее окрестностного $\mathcal{N}$-продолжения. В случае конечной фильтрации требование $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in$ $\in \mathrm{equi\text{-}LC}^n$ можно заменить более слабым условием $Y_i \in \mathrm{LC}^n$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. позволяет получить достаточное условие для абсолютной $\mathcal{N}$-продолжимости $\mathcal{N}$-отображений в случае конечномерных $\mathcal{N}$-ANE-пространств.

Теорема 2. *Пусть* Y *— такое* $\mathcal{N}$*-пространство, что* $\dim Y \leqslant n$, $n \geqslant 0$. *Если фильтрация* $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *является* $\mathrm{equi\text{-}LC}^n$*-семейством, то* $Y \in \mathcal{N}\text{-}\mathrm{ANE}$.

Литература

1. *Борсук К.* Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.

2. *Бордман Дж., Фогт Р.* Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977.