ПОЧТИ ГИПЕРЭРМИТОВА СТРУКТУРА ВТОРОГО РОДА ТИПА (J, P_1, P_2) НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

С.А. Богданович

Белорусский государственный педагогический университет, физический факультет,

Советская 18, 220050 Минск, Беларусь

bogdanovich@bspu.unibel.by

Определение 1. Три тензорных поля J, P_1, P_2 типа $(1,1)$ на гладком многообразии M^{2n}, удовлетворяющие условиям $J^2 = -I, P_1^2 = P_2^2 = I, JP_1 = -P_1J = P_2$. называются почти кватернионной структурой второго рода (структурой типа (J, P_1, P_2)) [1].

Пусть g – риманова метрика на (M, J, P_1, P_2).

Определение 2. Структуру типа (J, P_1, P_2), для которой $g(JX, JY) = g(P_1X, P_1Y) = g(P_2X, P_2Y) = g(X, Y)$, будем называть почти гиперэрмитовой структурой второго рода типа (J, P_1, P_2) и обозначать (J, P_1, P_2, g).

Структура (J, g) является почти эрмитовой структурой, а структуры (P_1, g) и (P_2, g) — римановыми структурами почти произведения. Если (M, g) — риманово многообразие размерности n и TM – его касательное расслоение, то для метрической связности $\tilde{\nabla}$ рассмотрим отображение $\tilde{K}$ [2]:

$$\tilde{\nabla}_X Z = \tilde{K} Z_* X,$$

где Z рассматривается как отображение из M в TM.

Для векторных полей $\bar{X} = \bar{X}^h \oplus \bar{X}^v$, $\bar{Y} = \bar{Y}^h \oplus \bar{Y}^v$ и U на TM и тензорного поля кривизны $\tilde{R}$ связности $\tilde{\nabla}$ имеют место равенства ([2]): $\pi_* \bar{X}^h_U = X_{\pi(U)}$, $\pi_* \bar{X}^v_U = 0_{\pi(U)}$, $\tilde{K} \bar{X}^h_U = 0_{\pi(U)}$, $\tilde{K} * \bar{X}^v_U = X_{\pi(U)}$, $[\bar{X}^v, \bar{Y}^v] = 0$, $[\bar{X}^h, \bar{Y}^v] = \left(\overline{\tilde{\nabla}_X Y}\right)^v$, $\pi_*([\bar{X}^h, \bar{Y}^h]_U) = [X, Y]_U$, $\tilde{K}([\bar{X}^h, \bar{Y}^h]_U) = \tilde{R}(X, Y)U$.

Естественная риманова метрика $\hat{g}$, каноническая почти эрмитова структура $(J, \hat{g})$ на TM определяются равенствами

$$\hat{g}(\bar{X}, \bar{Y}) = g(\pi_* \bar{X}, \pi_* \bar{Y}) + g(\tilde{K}\bar{X}, \tilde{K}\bar{Y}), \quad J\bar{X}^h = \bar{X}^v, \quad J\bar{X}^v = -\bar{X}^h$$

соответственно [2].

Определим структуры почти произведения (P_1, g) и (P_2, g) на TM равенствами:

$$P_1\bar{X}^h = \bar{X}^h, \quad P_1\bar{X}^v = -\bar{X}^v;$$
$$P_2\bar{X}^h = \bar{X}^v, \quad P_2\bar{X}^v = \bar{X}^h.$$

Тензорные поля J, P_1, P_2 задают структуру $(J, P_1, P_2, \hat{g})$ на TM.

Теорема 1. *Структура $(J, P_1, P_2, \hat{g})$ на TM определяется только парой $(g, \tilde{\nabla})$.*

Изменяя метрику g и связность $\tilde{\nabla}$, получаем бесчисленное множество почти гиперэрмитовых структур второго рода типа (J, P_1, P_2) на касательном расслоении риманова многообразия.

Литература

1. *Yano K., Ako M.* Almost quaternion structures of the second kind and almost tangent structures // Kodai Math. Sem. Rep. 1973. V. 25. P. 63--91.

2. *Dombrowski P.* On the Geometry of the Tangent Bundle // J. Reine und Angew. Math. 1962. N. 210. P. 73–88.