О НАСЛЕДСТВЕННО G-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУППАХ СПОРАДИЧЕСКИХ ГРУПП

В.Н. Тютянов, П.В. Бычков

Гомельский госуниверситет имени Ф. Скорины, Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
tyutyanov@front.ru, pbychkov@tut.by

Все рассматриваемые группы являются конечными. Следующие определения можно найти в работе [1].

Определение 1. *Пусть G — конечная группа и $L \leqslant G$. Подгруппа L называется G-перестановочной, если для всякой подгруппы $H \leqslant G$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $LH^g = H^gL$.*

Определение 2. *Пусть G – конечная группа и $L \leqslant G$. Подгруппа L называется наследственно G-перестановочной, если для всякой подгруппы $T \leqslant G$ такой, что $L \leqslant T$, подгруппа L является T-перестановочной.*

В этой же работе были поставлены следующие вопросы:

Вопрос 1. (А.Н. Скиба [1]). Описать простые неабелевы группы G, которые имеют нетривиальную наследственно G-перестановочную подгруппу.

Вопрос 2. (В.Н. Тютянов, А.Н. Скиба [1]). Описать простые неабелевы группы G, которые имеют нетривиальную G-перестановочную подгруппу.

Хорошо известно, что имеется бесконечно много простых неабелевых групп G с собственной G-перестановочной подгруппой. Тем не менее, не известны примеры простых неабелевых групп G с собственной наследственно G-перестановочной подгруппой.

Получены следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — простая спорадическая группа. Тогда группа G не имеет собственной наследственно G-перестановочной подгруппы.*

Теорема 2. *Пусть G изоморфна одной из следующих групп: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, Co_3, Co_2, Co_1, J_3, HS, McL, $O'N$, Ru, HN, B, M. Тогда группа G не имеет собственной G-перестановочной подгруппы. Группа J_1 имеет собственную G-перестановочную подгруппу порядка 2.*

Литература

1. *Skiba A.N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2006. № 5(36). С. 12–31.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНУЮ ПОДГРУППУ

В.Н. Тютянов, Т.В.Тихоненко

Гомельский госуниверситет имени Ф. Скорины, Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
tyutaynov@front.ru, tihonenkotanya@rambler.ru

Строение конечной группы в значительной степени зависит от наличия той или иной системы перестановочных подгрупп. В работе Оре [1] было установлено, что если конечная группа G содержит подгруппу A, перестановочную со всеми подгруппами группы G, то подгруппа A субнормальна в группе G. Данный результат был усилен Ито и Сепом [2], которые доказали, что в этом случае фактор-группа A/A_G нильпотентна.

Ряд важных результатов, связанных с системами перестановочных подгрупп был получен А.Н. Скибой (см. обзор [3]).

Доказаны следующие результаты:

Теорема 1. Пусть G — конечная группа четного порядка, $1 \neq H < G$ и $|H|$ — нечетное число. Если H перестановочна с любой 2-подгруппой группы G, тогда $H \subseteq O(G)$.

Теорема 2. Пусть G — конечная группа четного порядка, $1 \neq H < G$ и $|H|$ — нечетное число. Если H перестановочна со всеми инволюциями группы G, то $S(G) \neq 1$.

Литература

1. *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite oder // Duke Math. J. 1939. Vol. 5. P. 431-460.

2. *Ito N., Srep J.* Uder die Quasinormalteiler vor endlichen Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. Vol. 23. P. 169-170.

3. *Skiba A.N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2006. Т. 36. № 3. С. 12–31.

СВОБОДНЫЕ ПОДГРУППЫ В ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУППАХ

Сюин Хуа[1], В.В. Беняш-Кривец[2]

[1] Харбин, Китай
huaxiuyingnihao@163.com

[2] Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
benyash@bsu.by

Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление вида

$$G = \langle a_1, a_2, a_3 \mid a_1^{e_1} = a_2^{e_2} = a_3^{e_3} = R_1^m(a_1, a_2) = R_2^p(a_1, a_3) = R_3^q(a_2, a_3) = 1 >,$$

где R_1, R_2, R_3 — циклически редуцированные слова в свободной группе, порожденной a_1, a_2, a_3, которые не являются собственной степенью, показатели e_1, e_2, e_3 либо равны 0, либо $\geqslant 2$, а показатели m, p, $q \geqslant 2$. Будем говорить, что группа G имеет тип (e_1, e_2, e_3, m, p, q). Если для группы G выполнено одно из условий: G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса, то говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса. В [1] Файн и Розенбергер выдвинули гипотезу, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса. Ими получен ряд результатов, подверждающих эту гипотезу. В частности, доказано, что если $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 2$, то G удовлетворяет альтернативе Титса. Однако для большого числа типов групп эта гипотеза остается недоказанной.

Теорема 1. *1. Пусть G — обобщенная тетраэдральная группа одного из типов:* $(2, 3, 10, 2, 2, 2)$, $(2, 4, 5, 2, 2, 2)$, $(2, 5, 6, 2, 2, 2)$. *Тогда G содержит неабелеву свободную подгруппу. В частности, G удовлетворяет альтернативе Титса.*

2. Пусть G — обобщенная тетраэдральная группа типа $(0, 2, 2, 2, 2, 2)$. *Тогда G содержит неабелеву свободную подгруппу во всех случаях, за исключением групп* $G_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \mid a_2^2 = a_3^2 = (a_1a_2)^2 = (a_1a_3)^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle$ *и* $G_2 = \langle a_1, a_2, a_3 \mid a_2^2 = a_3^2 = (a_1^2a_2)^2 = (a_1a_3)^2 =$ char"3D $(a_2a_3)^2 = 1\rangle$, *которые являются разрешимыми. В частности, G удовлетворяет альтернативе Титса.*