ПРОИЗВЕДЕНИЕ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ π-ГРУПП

В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук

УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»,
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Беларусь
sshauchuk@gmail.com

В теории классов конечных групп важную роль играют классы всех π-групп (π — некоторое множество простых чисел), которые обозначаются $\mathfrak{G}_\pi$. Большинство важнейших классов конечных групп можно построить из классов $\mathfrak{G}_\pi$ с помощью операций пересечения и произведения классов.

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Необходимые обозначения и определения можно найти в [1].

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Обозначим через I любое подмножество $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Пусть π_i, π_j — некоторые множества простых чисел, а $\mathfrak{G}_{\pi_i}$, $\mathfrak{G}_{\pi_j}$ — классы всех π_i- и π_j-групп соответственно. Пусть

$$\mathfrak{F} = \bigcap\nolimits_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}, \quad \text{где } (i,j) \text{ пробегает все пары из } I.$$

Обозначим через $\pi(G)$ множество всех различных простых делителей порядка группы G, а через $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех различных простых делителей порядков груп из класса $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Группа G $(\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}))$ тогда и только тогда принадлежит формации $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех π-нильпотентных групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех π-замкнутых групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех π-разложимых групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Литература

1. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М : Наука 1978. 267 с.

К ТЕОРЕМЕ ШУРА — ЦАССЕНХАУЗА

А.Н. Скиба

Гомельский госуниверситет имени Ф. Скорины, Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
alexander.skiba49@gmail.com

Все рассматриваемые нами группы конечны. Напомним, что подгруппа H группы G перестановочна с подгруппой K, если $HK = KH$. Если $HK = G$, то K называют *добавлением к* H в G. Если же при этом $H \cap K = 1$, то K называют *дополнением к* H в G.

Согласно классической теореме Шура — Цассенхауза, всякая нормальная холлова подгруппа дополняема в основной группе и все ее дополнения сопряжены. В работах [1] и [2] были найдены аналоги этого результата для ненормальных холловых подгрупп. Некоторым уточнением результатов работ [1] и [2] является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть H — холлова подгруппа группы G и K — произвольное добавление к H в G. Если H перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из K, то H дополняема в G и все ее дополнения в G сопряжены.*

Кроме того, получено обобщение этого результата в рамках теории условно перестановочных (в смысле[3, 4]) подгрупп.

Литература

1. *Guo W., Shum K.P., Skiba A.N.* X-semipermutable Subgroups of Finite Groups // J Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.

2. *Guo W., Shum K.P., Skiba A.N.* Schur-Zassenhaus theorem for X-permutable subgroups // Algebra Colloqiuim. 2008. V. 15. N 2. P. 185–192.

3. *Guo W., Shum K.P., Skiba A.N.* Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups // Southeast Asian Bull Math. 2005. V. 29. P. 493–510.

4. *Guo W., Shum K.P., Skiba A.N.* Criterions of Supersolubility for Products of Supersoluble Groups // Publ. Math. Debrecen // 2006. V. 68. N 3–4. P. 433–449.

АССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА С ТОЖДЕСТВОМ ЛИЕВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

М.Б. Смирнов

БНТУ, Независимости 65, 220013 Минск, Беларусь
mbsmir-vm2@yandex.ru

Пусть R — ассоциативное кольцо, разрешимое класса n ($n > 2$) как кольцо Ли (разрешимость класса $n = 2$ означает метабелевость $[x_1, x_2, [x_3, x_4]] = 0$, где $[x, y] = xy - yx$).

В [1] было доказано, что такое кольцо по модулю нильпотентного идеала I, класса нильпотентности не выше $3 \cdot 15^{n-2}$ является центрально метабелевым, т.е. кольцо R/I удовлетворяет тождеству $[[x_1, x_2, [x_3, x_4]], x_5] = 0$. С точки зрения уменьшения многообразия в заключении теоремы там же было установлено, что кольцо R обладает нильпотентным идеалом J, класса нильпотентности не выше $8 \cdot 15^{n-2}$, таким, что R/J удовлетворяет тождествам центральной метабелевости и $\operatorname{Sym}_{1,3,5}[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = 0$, где $\operatorname{Sym}_{1,3,5}$ означает суммирование по всем перестановкам чисел $1, 3, 5$.

В тезисах анонсируются улучшенные доказательства этих теорем, в частности, оценки классов нильпотентности идеалов I и J понижаются соответственно до $3 \cdot 10^{n-2}$ и $4 \cdot 10^{n-2}$. Также построен пример, позволяющий оценить класс нильпотентности идеала I снизу, который в общем случае может достигать значения 2^{n-2}. Это показывает, что экпоненциальность роста класса нильпотентности в оценке сверху не может быть заменена полиномиальным ростом.

Литература

1. *Залесский А.Е., Смирнов М.Б.* Ассоциативные кольца, удовлетворяющие тождеству лиевой разрешимости. //Весці АН БССР, сер фіз-мат. навук. 1982. № 2. С. 15 20.