КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $\mathfrak{F}$-КОФАКТОРАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

С. М. Евтухова,[1] В. С. Монахов[2]

[1] Гомельский технический госуниверситет им. П. О. Сухого, проспект Октября, 48, Гомель, 246746

[2] Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины, ул. Советская, 104, Гомель, 246019
monakhov@gsu.by

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемые обозначения и понятия соответствуют [1].

Кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа H/H_G, где $H_G = \bigcap_{x\in G} x^{-1}Hx$ — ядро подгруппы H в группе G.

Естественно ожидать, что строение группы существенно зависит от свойств кофакторов ее подгрупп. Одной из первых работ в этом направлении является работа Я. Г. Берковича [2], в которой, в частности, установлена разрешимость группы с нильпотетными кофакторами максимальных подгрупп. Группа со сверхразрешимыми кофакторами максимальных подгрупп может быть неразрешимой. Примером служит группа $PGL(2,7)$. Этот факт также отмечается в [2].

В настоящей заметке развивается тематика подобных исследований и исследуются группы с кофакторами подгрупп, принадлежащими некоторому классу $\mathfrak{F}$.

Условимся для класса $\mathfrak{X}$ через $M(\mathfrak{X})$ обозначать класс всех групп G таких, что $G \notin \mathfrak{X}$, но каждая собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{X}$. Как всегда $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, а $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ — произведение классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}$, см. [1].

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая насыщенная формация. Если в разрешимой группе G кофакторы максимальных подгрупп принадлежат $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная разрешимая формация такая, что класс $M(\mathfrak{F})$ состоит из разрешимых групп. Если в группе G кофактор каждой подгруппы принадлежит $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

В случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп из теоремы вытекает

Следствие 1. *Если в разрешимой группе G кофакторы максимальных подгрупп сверхразрешимы, то нильпотентная длина группы G не превышает 3, p-длина $l_p(G) \leqslant 2$ для всех $p \in \pi(G)$, и $l_q(G) \leqslant 1$ для наибольшего q из $\pi(G)$.*

Пример. В симметрической группе S_4 степени 4, максимальными подгруппами являются знакопеременная группа A_4 степени 4, симметрическая группа S_3 степени 3 и группа диэдра, совпадающая с силовской 2-подгруппой. Подгруппа A_4 нормальна в S_4. Поэтому кофакторы максимальных подгрупп в S_4 сверхразрешимы. Хорошо известно, что нильпотентная длина группы S_4 равна 3, 2-длина равна 2, а 3-длина равна 1. Следовательно, указанные в следствии 1 оценки являются точными.

Литература

1. *Монахов В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа 2006. 207с.

2. *Беркович Я.Г.* Конечные группы с большими ядрами максимальных подгрупп // Сиб. матем. ж. 1968. Т. IX, №2. С. 243–248.

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С БИПРИМАРНЫМИ КОФАКТОРАМИ ПОДГРУПП

С. М. Евтухова,[1] В. С. Монахов[2]

[1] Гомельский технический госуниверситет им. П. О. Сухого, проспект Октября, 48, Гомель, 246746

[2] Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины, ул. Советская, 104, Гомель, 246019
monakhov@gsu.by

Рассматриваются только конечные группы. Используемые в работе обозначения и определения стандартны и соответствуют [1]. Напомним, что кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа H/H_G, где $H_G = \bigcap_{x\in G} x^{-1}Hx$ — ядро подгруппы H в группе G, т. е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H. Исследованию конечных групп с ограничениями на порядки кофакторов подгрупп посвящена диссертация [2], где имеется и обзор результатов этого направления, см. также [3].

В статье Е. Т. Огаркова перечислены неразрешимые группы, все собственные подгруппы которых имеют примарные или бипримарные кофакторы ([4], теорема 2). Однако, в этой теореме указаны не все группы. Примерами служат группы $PSL(2,3^3)$, $PSL(2,3^5)$, $PSL(2,3^7)$, $PSL(2,23)$, $PSL(2,47)$, в которых все подгруппы примарны, либо бипримарны, но их нет в списке теоремы 2 работы [4]. В настоящей заметке приводится уточненная формулировка теоремы о неразрешимых группах, все собственные подгруппы которых имеют примарные или бипримарные кофакторы.

Теорема 1. *Если в неразрешимой группе G все собственные подгруппы имеют примарные или бипримарные кофакторы, то группа $\overline{G} = G/R(G)$ содержит нормальную подгруппу $\overline{N} = N/R(G)$ такую, что $\overline{N} \subseteq \overline{G} \subseteq Aut(\overline{N})$, где $\overline{N}$ является одной из следующих групп:*

1) $PSL(2,q)$, $q = 5, 8$;

2) $PSL(2,p)$, где p — такое простое число, что $p > 5$, $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$, $p-1 = 2\cdot 3^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, $p+1 = 2^s \cdot q^\beta$, $s \geqslant 2$, $\beta \geqslant 0$, q — простое число, $q > 3$;

3) $PSL(2,p)$, где p — такое простое число, что $p > 5$, $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$, $p-1 = 2^l \cdot r^\gamma$, $l \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 0$, r — простое число, $r > 3$ и $\gamma = 0$ при $l > 1$, $p+1 = 2^t \cdot 3^\delta$, $t \geqslant 1$, $\delta \geqslant 1$;

4) $PSL(2,3^p)$, где p — такое нечетное простое число, что $3^p - 1 = 2\cdot q^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, q — простое число, $q > 3$, $3^p + 1 = 2^2 \cdot r^\gamma$, $\gamma \geqslant 1$, r — простое число, $r > 3$ и $r \neq q$;

5) $PSL(3,3)$;

6) $Sz(q)$, где $q = 8$ или 32.

Кроме того, $\tau(R(G)/F(R(G))) \leqslant 2$, а подгруппа $F(R(G))$ содержит дедекиндову подгруппу D, все собственные подгруппы которой нормальны в G, и $\tau(F(R(G))/D) \leqslant 2$.