К ОДНОЙ РАБОТЕ HASSE О ЗАКОНЕ ВЗАИМНОСТИ ЭЙЗЕНШТЕЙНА

С.В. Востоков[1], **М.А. Иванов**[1]

[1] Петербургское отделение математического института им. В.А.Стеклова (ПОМИ),
Фонтанка 27, 191011 Санкт Петербург, Россия
sergei.vostokov@gmail.com

G. Eisenstein в работе [1] получает элегантный закон взаимности: $\left(\frac{\alpha}{a}\right) = \left(\frac{a}{\alpha}\right)$, если $\alpha \equiv b \mod (1-\zeta)^2$, где $b \in \mathbb{Z}$, $(b,p)=1$.

H. Hasse обобщает закон взаимности Эйзенштейна на произвольное круговое поле и получает следующий результат [2].

Пусть $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta := \zeta_n$, $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$, $m_i > 0$. Пусть q — простое число такое, что $q^{p_i-1} \equiv 1 \mod p_i^{m_i}, i = 1,2,\dots,r$; $\wp_i$ — простой идеал над (p_i) в круговом поле $\mathbb{Q}(\zeta_{p_i^{m_i}})$, α — число из кольца $\mathbb{Z}[\zeta]$ со свойством $(\alpha, nq) = 1$, $a \equiv \xi_i^{p_i} \mod \wp_i^2$ при некоторых ξ_i из K, $i = 1,\dots,r$.

Теорема 1. (Hasse) *Для символов n-х (соответственно $n/4$) степенных вычетов в K имеет место закон взаимности:*

$$\left(\frac{\alpha}{q}\right)_n = \left(\frac{q}{\alpha}\right)_n, \quad \textit{если} \ \ n \not\equiv 0 \mod 4;$$

$$\left(\frac{\alpha}{q}\right)_{n/4} = \left(\frac{q}{\alpha}\right)_{n/4}, \quad \textit{если} \ \ n \equiv 0 \mod 4.$$

В частности, для $n = p^m$ имеем условие $\alpha \equiv \xi^p \mod \wp^2$, $\xi \in K$, и при $p \neq 2$: $\left(\frac{\alpha}{q}\right) = \left(\frac{q}{\alpha}\right)$, если $q^{p-1} \equiv 1 \mod p^m$.

В настоящей работе, используя явный закон взаимности кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, $2 \nmid n$, найденный в работе [3], мы находим необходимые и достаточные условия равенства степенных вычетов $\left(\frac{\alpha}{a}\right)_n$ и $\left(\frac{a}{\alpha}\right)_n$ для целых рациональных a, $(a,n)=1$.

Обозначения: $2 \nmid n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$, $n_i = n/p_i^{m_i}$; $\zeta_i := \zeta_{p_i^{m_i}}$, $1 \leqslant i \leqslant r$; $\zeta_i' = \zeta_{p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r}$; $\{\alpha,\beta\}_n := \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n^{-1}$.

Пусть a — фиксированное целое рациональное число, взаимно простое с n.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\{a,\alpha\}_n = 1$ *для всех* $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta_\kappa]$, $(\alpha, n) = 1$.
2. $\{a, 1-\zeta_i^j(\zeta_i - 1)\}_n = 1$, $1 \leqslant i \leqslant r$.
3. $\frac{a^{p_i-1}-1}{p_i} \equiv 0 \mod p_i^{m_i}$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Литература

1. *Eisenstein G.* Über ein einfaches Mittel zur Auffinding verbindenden Ergänzungssätze // T. für die reine u. ang. Mathematik. 1927. Vol. 39. P. 351-364.
2. *Hasse H.* Das Eisensteinische Reziprozitäts — gesetz der n-ten Potenzreste // Math. Ann. 1927. Vol. 97. P. 599-623.
3. *Востоков С.В.* Классический закон взаимности степенных вычетов, как аналог теоремы об абелевом интеграле // в печати.

О КОНГРУЭНЦИЯХ n-АРНОЙ ГРУППЫ

А.М. Гальмак

Могилевский государственый университет продовольствия, Шмидта, 3, 212027 Могилев, Беларусь
mti@mogilev.by

В разложении группы по ее подгруппе один из смежных классов, а именно смежный класс, содержащий единицу группы, является подгруппой. Все остальные смежные классы в этом разложении подгруппами не являются. При $n \geqslant 3$, в отличие от бинарного случая, может быть несколько смежных классов в разложении n-арной группы по ее n-арной подгруппе, которые являются n-арными подгруппами. Возможна даже ситуация, когда все смежные классы являются n-арными подгруппами. В данной работе найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы смежный класс в разложении n-арной группы по ее полуинвариантной n-арной подгруппе сам был бы n-арной подгруппой.

Согласно предложению 7.4 [1], если $< B, [\,] >$ — полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, то на $< A, [\,] >$ существует конгруэнция ρ_B, классы которой совпадают со смежными классами $< A, [\,] >$ по $< B, [\,] >$: $\rho_B(a) = [a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}]$.

Предложение 1. *Пусть* $< B, [\,] >$ *— полуинвариантная* n*-арная подгруппа* n*-арной группы* $< A, [\,] >$,

$$C = [y\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}y] \qquad (1)$$

— смежный класс, являющийся n*-арной подгруппой в* $< A, [\,] >$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $[\underbrace{y\ldots y}_{n-1}B] = B$, $[B\underbrace{y\ldots y}_{n-1}] = B$;
2) $[x\underbrace{C\ldots C}_{n-1}] = [x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}]$, $[\underbrace{C\ldots C}_{n-1}x] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$ *для любого* $x \in A$;
3) $C = [x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$ *для любого* $x \in C$;
4) n*-арная подгруппа* $< C, [\,] >$ *— полуинвариантна в* $< A, [\,] >$;
5) $\rho_B = \rho_C$, *т.е.* $< B, [\,] >$ *и* $< C, [\,] >$ *определяют одну и ту же конгруэнцию.*

Следующая теорема показывает, что верно обращение утверждения 1) предложения.