ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИИ НИМАЙЕРА

В.П. Буриченко

Институт математики НАН Беларуси, Кирова 32а, 246000 Гомель, Беларусь
vpburich@gmail.com, goim@nauka.belpak.gomel.by

Пусть $X = \{1,\ldots,8\}$; $\Gamma_0 = X$, Γ_1 и Γ_2 — множества всех неупорядоченных пар, соответственно четверок, элементов из X.

Под *аффинной структурой* на X понимается набор $\mathcal{A} = \{T_1,\ldots,T_{14}\}$, где T_i — различные четверки из X, причем $T_i \cap T_j = \varnothing$ или $|T_i \cap T_j| = 2$ при $i \neq j$. Например, если перенумеровать точки пространства $\mathbf{F}_2^3$ произвольным образом, то множество аффинных плоскостей в $\mathbf{F}_2^3$ образует аффинную структуру в указанном смысле. Симметрическая группа S_8 действует на множестве аффинных структур транзитивно, а A_8 имеет две орбиты, обе длины 15. Пусть Ω — одна из них.

Положим $\Gamma_3 = \Omega$. Определим на дизъюнктном объединении $\Gamma = \Gamma_0 \sqcup \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \sqcup \Gamma_3$ симметрическое рефлексивное отношение, называемое инцидентностью. На $\Gamma_0 \sqcup \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ инцидентность определяется включением. Любой элемент из $\Gamma_0 \sqcup \Gamma_1$ инцидентен любому элементу из Γ_3. Два различных $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Gamma_3$ не инцидентны. Наконец, четверка $T \in \Gamma_2$ инцидентна структуре $\mathcal{A} \in \Gamma_3$, если T — плоскость относительно $\mathcal{A}$.

Множество Γ с описанным отношением инцидентности — это так называемая геометрия Нимайера. Множество попарно инцидентных точек из Γ называем *флагом*. Легко видеть, что любой флаг лежит в полном флаге (т.е., содержащем по одному элементу из каждого $\Gamma_i 0$, причем любой неполный флаг лежит в $\geqslant 2$ полных.

Пусть $K(\Gamma)$ — симплициальный комплекс, вершины которого суть элементы из Γ, а симплексы — флаги. Мы нашли его группы гомологий.

Теорема 1. *$H_i(K(\Gamma)) \cong \mathbf{Z}$ при $i = 0$, $= 0$ при $i = 1$, $\cong Z_2^4 \oplus Z_4^6$ при $i = 2$, и является свободной абелевой группой при $i = 3$.*

Изучение гомологических свойств геометрий представляет интерес потому, что они связаны с когомологическими свойствами групп, действующих на этих геометриях, как это описано в [1].

Литература

1. *Бурченко В.П.* Локальный подход к расширениям и когомологиям // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 1999. Т. 3. С. 21–28