Актуальные проблемы современного анализа

Гродно
ГрГУ им. Я. Купалы
2009

Оглавление

[11] *Стасюк, М.Ф.* Рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку / М.Ф. Стасюк, О.О. Власій // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Прикладна матем. – 2000. – № 407. – С. 82–87.

[12] *Стасюк, М.* Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами / М. Стасюк, Р. Тацій // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 566. – С. 33–40.

[13] *Тацій, Р.М.* Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння / Р.М. Тацій, Б.Б. Пахолок // ДАН УРСР: Серія А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.

[14] *Колмогоров, А.Н.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомін. – Київ: Вища школа, 1974. – 456 с.

[15] *Пахолок, Б.Б.* Об одном неравенстве типа Гронуолла—Беллмана / Б.Б. Пахолок // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференциальные уравнения и их приложения. – 1989. – № 232. – С. 109–110.

[16] *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

[17] *Аткинсон, Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. – М.: Мир, 1968. – 750 с.

Тациий Роман Марьянович, doktor habilitovany, profesor, Politechnika Lubelska, Lublin, Poland, marta_stasiuk@yahoo.com.

Стасюк Марта Фёдоровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности, Львов, Республика Украина, marta_stasiuk@yahoo.com.

Власий Олеся Орестовна, Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника, Ивано-Франковск, Республика Украина, olesyav@ukr.net.

УДК 519.65

Л.А. Янович, М.В. Игнатенко

Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита—Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций

Построен новый класс алгебраических интерполяционных многочленов Эрмита—Биркгофа произвольной фиксированной степени для случая скалярных функций. На их основе получены интерполяционные операторные формулы Эрмита—Биркгофа различной структуры и некоторые их обобщения в классе гладких функций. Указан вид операторных многочленов, для которых эти формулы инвариантны.

1. Введение

При построении интерполяционных формул для операторов, заданных на функциональных пространствах, могут применяться известные интерполяционные многочлены для скалярных функций. На основе такого подхода был получен ряд формул операторного интерполирования [1]– [3]. Данная статья посвящена дальнейшему развитию этого направления.

Пусть $X = C^p\,[a;\,b]$ — пространство p раз дифференцируемых на $[a;\,b] \subseteq R$ функций, фиксированные элементы $x_j \in X$, $j = 0,\,1,\,...,\,n,$ — узлы интерполирования, оператор $F : X \to Y$, где Y — некоторое функциональное пространство, а $\delta^\nu F[x;\,h_1,\,h_2,\,...,\,h_\nu]$ — ν-й дифференциал Гато оператора F в точке $x = x(t)$ по напрвлениям $h_i = h_i(t) \in X$ $(i = 1,\,2,\,...,\,\nu;\ t \in [a;\,b])$.

Интерполяционная задача Эрмита для $F(x)$ $(x \in X)$ состоит в построении операторного многочлена $H_m(F;\,x) \equiv H_m(x) : X \to Y$, степени не выше m, удовлетворяющего условию

$$\delta^{\beta_j} H_m[x_j;\,h_1,\,h_2,\,...,\,h_{\beta_j}] = \delta^{\beta_j} F[x_j;\,h_1,\,h_2,\,...,\,h_{\beta_j}], \tag{1}$$

$$\beta_j = 0,\,1,\,...,\,\alpha_j - 1;\ j = 0,\,1,\,...,\,n;\ \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m + 1.$$

Задача Эрмита—Биркгофа возникает, когда в интерполяционном условии (1) некоторые из порядков дифференциалов β_j отсутствуют. В частном случае, если требуется построить операторный многочлен $H_n(x) : X \to Y$, такой, чтобы

$$\delta^j H_n[x_j;\,h_{j1},\,h_{j2},\,...,\,h_{jj}] = \delta^j F[x_j;\,h_{j1},\,h_{j2},\,...,\,h_{jj}],$$

где $j = 0,\,1,\,...,\,n;$ $h_{jk} \in X$, приходим к интерполяционной задаче Абеля—Гончарова. Под обобщенным операторным интерполированием типа Эрмита будем понимать интерполирование операторов, при котором имеет место совпадение в узлах некоторых операторно-дифференциальных выражений.

Построение интерполяционных формул Эрмита—Биркгофа и различных их обобщений даже для скалярных функций обычно связано со значительными трудностями. В ряде случаев интерполяционная задача Эрмита—Биркгофа вообще не имеет решения [4]– [6]. Сложности в значительной степени возрастают при исследовании операторного аналога этой задачи.

Будем рассматривать только те операторы $F(x)$, для которых дифференциалы $\delta^\nu F[x;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_\nu]$ содержат произведение направлений $h_1,\ h_2,\ ...,\ h_\nu$. В частности, если $F(x) = f(s,\ x(t))$, где $f(s,\ u)$ — скалярная функция аргументов $s \in C^\alpha$ $(\alpha \in N)$ и $u \in R$, дифференцируемая по переменной u не менее, чем ν раз, то $\delta^\nu F[x;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_\nu] = \dfrac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} f(s,\ x)\, h_1 h_2 \cdots h_\nu$, где $x = x(t)$ и $h_i = h_i(t)$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ \nu)$. Этим свойством обладают, например, операторы Гаммерштейна, Урысона и многие другие.

Через $\delta^\nu F[x;\ h]$ обозначим дифференциал ν-го порядка, где первые $\nu - 1$ направлений $h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{\nu-1}$ тождественно равны единице, а последнее направление $h_\nu = h$.

2. Интерполяционные многочлены, содержащие дифференциалы интерполируемого оператора

Предварительно построим интерполяционную формулу Эрмита—Биркгофа частного вида для скалярных функций. Пусть заданы узлы интерполирования $t_0,\ t_1,\ ...,\ t_n$ — различные точки числовой оси, а также известны значения $f(t_0),\ f(t_1),\ ...,\ f(t_n)$ и значения производных $f^{(n+1)}(t_i),\ f^{(n+2)}(t_i),\ ...,\ f^{(n+m)}(t_i)$ в некотором фиксированном узле t_i $(0 \le i \le n)$ функции $f(t)$, $t \in R$. Требуется построить алгебраический многочлен $H_{n+m}(f,\ t) \equiv H_{n+m}(t)$ степени не выше $n + m$, удовлетворяющий условиям

$$H_{n+m}(t_k) = f(t_k),\ \ k = 0,\ 1,\ ...,\ n; \tag{2}$$

$$H_{n+m}^{(n+j)}(t_i) = f^{(n+j)}(t_i),\ \ j = 1,\ 2,\ ...,\ m. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$l_{nk}(t) = \frac{\omega_n(t)}{(t - t_k)\omega_n'(t_k)},\ \ h_{nj}(t) = \varphi_{nj}(t) - \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(t)\varphi_{nj}(t_k), \tag{4}$$

$$\omega_n(t) = (t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_n),\ \varphi_{nj}(t) = \frac{(t-t_i)^{n+j}}{(n+j)!},$$

где $k = 0,\ 1,\ ...,\ n;\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m.$

Заметим, что в частном случае для $m = 1$ справедливо тождество $h_{n1}(t) \equiv \dfrac{\omega_n(t)}{(n+1)!}$, решение поставленной задачи известно и искомый алгебраический многочлен Эрмита—Биркгофа степени не выше $n+1$ имеет вид

$$H_{n+1}(t) = L_n(t) + \frac{\omega_n(t)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t_i), \tag{5}$$

где $L_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} l_{nk}(t) f(t_k)$ — интерполяционный алгебраический многочлен Лагранжа. Отсюда с учетом приближенного равенства $f(x) \approx H_{n+1}(t)$ следует правило нахождения приближенного значения производной $(n+1)$ порядка функции $f(t)$ в некотором фиксированном узле t_i :

$$f^{(n+1)}(t_i) \approx \frac{(n+1)!}{\omega_n(t)} \left[f(t) - L_n(t)\right].$$

Лемма 1. *Для алгебраического многочлена*

$$H_{n+m}(t) = \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(t) f(t_k) + \sum_{j=1}^{m} h_{nj}(t) f^{(n+j)}(t_i)$$

выполняются условия (2), (3), *где* t_i — *фиксированный узел. Если* $f(t) = Q_{n+m}(t)$ — *алгебраический многочлен степени не выше* $n+m$, *то* $H_{n+m}(t) \equiv Q_{n+m}(t)$.

Доказательство. Выполнение интерполяционных условий (2), (3) следует из того, что $l_{nk}(t_\nu) = \delta_{k\nu}$, $h_{nj}(t_\nu) = 0$ для всех $k,\ \nu = 0,\ 1,\ ...,\ n;\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m,$ где $\delta_{k\nu}$ — символ Кронекера, а $l_{nk}^{(n+j)}(t) \equiv 0$, $h_{n\nu}^{(n+j)}(t_i) = \delta_{\nu j}$ при любых $k = 0,\ 1,\ ...,\ n;$ $\nu,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m.$

Если $f(t) = Q_n(t)$ — алгебраический многочлен степени не выше n, тогда $H_{n+m}(t)$ совпадает с многочленом Лагранжа для этой же функции $f(t)$ с теми же узлами интерполирования и поэтому

$H_{n+m}(t) \equiv Q_n(t)$. Далее достаточно показать точность формулы $f(t) \approx H_{n+m}(t)$, когда $f(t) = h_{n\nu}(t)$ ($\nu = 1,\ 2,\ ...,\ m$). В этом случае

$$H_{n+m}(t) = \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(t)h_{n\nu}(t_k) + \sum_{j=1}^{m} h_{nj}(t)h_{n\nu}^{(n+j)}(t_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} h_{nj}(t)\delta_{\nu j} = h_{n\nu}(t).$$

Итак, лемма 1 доказана. □

Заметим, что для погрешности $R_{n+m}(f;\ t) = f(t) - H_{n+m}(t)$ верно равенство $R_{n+m}(f;\ t) = r_n(f;\ t) - \sum\limits_{j=1}^{m} r_n(\varphi_{nj};t)f^{(n+j)}(t_i)$, где $r_n(g;\ t)$ — остаток интерполирования функции g в точке t многочленом Лагранжа степени не выше n относительно узлов $t_0, t_1,\ ..., t_n$. Известно, что для функций $g \in C^{(n+1)}[a;\ b]$, где $[a;\ b]$ — наименьший отрезок, содержащий узлы $t_0, t_1,\ ..., t_n$ и точку t, остаточный член $r_n(g;\ t)$ может быть записан в форме Лагранжа $r_n(g;\ t) = \dfrac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(t)$, $\xi \in (a;\ b)$. Поэтому для погрешности $R_{n+m}(f;\ t)$ построенной интерполяционной формулы Эрмита—Биркгофа $H_{n+m}(t)$ справедливо представление

$$R_{n+m}(f;\ t) = \left\{ f^{(n+1)}(\xi_0) - \sum_{j=1}^{m} \frac{(\xi_j - t_i)^{(j-1)}}{(j-1)!} f^{(n+j)}(t_i) \right\} \frac{\omega_n(t)}{(n+1)!},$$

где $\xi_j \in (a;\ b)$, $j = 0,\ 1,\ ...,\ m$; $a = \min\{t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_n,\ t\}$, $b = \max\{t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_n,\ t\}$.

Данное представление для интерполяционной формулы (5) примет вид

$$R_{n+1}(f;\ t) = \frac{(\xi_0 - t_i)\omega_n(t)}{(n+1)!} f^{(n+2)}(\xi_1),$$

где $\xi_0,\ \xi_0 \in (a;\ b)$.

Рассмотрим, далее, операторные многочлены $P_{n+m}(x) : X \to Y$ степени $n + m$ вида

$$P_{n+m}(x) = c_0(x) + \sum_{k=1}^{n+m} \int\limits_{c}^{d} c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}x^q(t)dt \ \ (\nu = 0,\ 1,\ ...,\ p), \qquad (6)$$

где $c_0(x)$ и $c_q(s,\ t)$ — некоторые фиксированные функции

$$(s \in C^{\alpha},\, \alpha \in \mathrm{N};\ t \in [c;\ d]\,;\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n+m).$$

Отметим, что если $F(x) = \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\dfrac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}x^q(t)dt,\ \nu = 0,\ 1,\ ...,\ p;$ $q = 0,\ 1,\ ...,\ n+m$, то

$$\delta^j F[x;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_j] = \tag{7}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{q!}{(q-j)!}\displaystyle\int\limits_c^d c_q(s,\ t)\dfrac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\ \left[x^{q-j}(t)h_1(t)h_2(t)\cdots h_j(t)\right]dt, & j \le q; \\ \qquad\qquad\qquad 0, & j > q. \end{cases}$$

Предполагаем, что функции $\{x_k(t)\}_{k=0}^{n} \in X$, используемые в дальнейшем в качестве узлов интерполирования, таковы, что $x_i(t) \neq x_j(t)$ при $i \neq j$ для любых $t \in [a;\ b]$.

Пусть $g(\tau,t;x)$ — линейный на X оператор, удовлетворяющий условиям

$$g(a,t;x) \equiv 0,\ g(b,t;x) \equiv x(t);\ \ \tau,t \in [a;\ b],\ x \in X, \tag{8}$$

а для интерполируемых операторов $F(x)$ справедливо равенство

$$\delta F[x_0(\cdot) + g(\tau,\cdot;h);\ g'_{\tau}(\tau,\cdot;h)] = F'_{\tau}(x_0(\cdot) + g(\tau,\cdot;h)),\ h \in X. \tag{9}$$

В частности, оператор $g(\tau,s;x)$ может быть основан на интегральных преобразованиях Фурье, Абеля или других и представлен как

$$g(\tau,s;x) = \int\limits_a^{\tau} \rho(s,t)\psi(t,x)dt = \begin{cases} 0, & \tau = a; \\ x(s), & \tau = b. \end{cases}$$

Для каждого из таких преобразований функция $\rho(s,t)$ и оператор $\psi(t,x)$ задаются соответствующими формулами. Так, в случае преобразования Абеля в пространстве $X = C^1[a;\ b]$, оператор $g(\tau,s;x)$ имеет вид

$$g(\tau,s;x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_a^{\tau} \frac{\chi(s,t)}{(s-t)^{1-\alpha}}\psi(t,x)dt,\ \ s > a,\ 0 < \alpha < 1,$$

где

$$\psi(t,x) = \frac{d}{dt}\int\limits_a^t \frac{x(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds, \quad \chi(s,t) = \begin{cases} 1, & s > t; \\ 0, & s < t. \end{cases}$$

Теорема 1. *Для операторного многочлена*

$$H_{n+m}(F;\ x) = F(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \delta^{n+j} F[x_i;\ h_{nj}(x)] + \tag{10}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_a^b \delta F[x_0(\cdot) + g(\tau,\cdot;x_k - x_0);\ l_{nk}(x(\cdot))g'_{\tau}(\tau,\cdot;x_k - x_0)]d\tau,$$

где $l_{nk}(x) \equiv l_{nk}(x(t))$ и $h_{nj}(x) \equiv h_{nj}(x(t))$ задаются равенствами (4)*, в которых точки t и t_k заменены соответственно на функции $x = x(t)$ и $x_k = x_k(t)$, выполняются условия*

$$H_{n+m}(F;\ x_k) = F(x_k), k = 0,\ 1,\ ...,\ n; \tag{11}$$

$$\delta^{n+j} H_{n+m}[x_i;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+j}] = \delta^{n+j} F[x_i;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+j}], \tag{12}$$

где x_i — фиксированный узел, $j = 1, 2, ..., m$. Если $F(x) = P_{n+m}(x)$ — операторный многочлен вида (6)*, то $H_{n+m}(F;\ x) \equiv P_{n+m}(x)$.*

Доказательство. Так как $h_{nj}(x_\nu) = 0$, а $l_{nk}(x_\nu) = \delta_{k\nu}$ для $j = 1,\ 2,\ ...,\ m$ и $k,\ \nu = 0,\ 1,\ ...,\ n$, то, используя тождества (8) и соотношение (9), получаем $H_{n+m}(F;\ x_\nu) =$

$$= F(x_0) + \int\limits_a^b \delta F[x_0(\cdot) + g(\tau,\cdot;x_\nu - x_0);\ g'_{\tau}(\tau,\cdot;x_\nu - x_0)]d\tau =$$

$$= F(x_0) + \int\limits_a^b F'_{\tau}(x_0(\cdot) + g(\tau,\cdot;x_\nu - x_0))d\tau =$$

$$= F(x_0) + F(x_\nu) - F(x_0) = F(x_\nu), \quad \nu = 0,\ 1,\ ...,\ n.$$

Учитывая тождества

$$\delta^{n+j} l_{nk}[x;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+j}] \equiv 0$$

и равенства

$$\delta^{n+j}h_{n\nu}[x_i;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+j}] =$$
$$= h_{n\nu}^{(n+j)}(x_i(t))h_1(t)h_2(t)\cdots h_{n+j}(t) = \delta_{\nu j}h_1(t)h_2(t)\cdots h_{n+j}(t)$$

для $\nu,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m$, приходим к (12).

Покажем инвариантность относительно операторных многочленов вида (6) интерполяционной формулы $H_{n+m}(F;\ x)$, задаваемой равенством (10). Пусть

$$F(x) = \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}x^q(t)dt, \tag{13}$$

где $\nu = 0,\ 1,\ ...,\ p$; $q = 0,\ 1,\ ...,\ n+m$. Для операторов (13) в случае $q = 0,\ 1,\ ...,\ n$ вторая сумма в (10) в силу порядка дифференциалов $n+j > n$ и равенства (7) обратится в нуль.

Так как

$$\int\limits_a^b \delta F[x_0(\cdot) + g(\tau,\cdot;x_k - x_0);\ l_{nk}(x(\cdot))g'_\tau(\tau,\cdot;x_k - x_0)]d\tau =$$
$$= \int\limits_a^b q\int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}[x_0(t) + g(\tau,t;x_k - x_0)]^{q-1}l_{nk}(x(t))\times$$
$$\times g'_\tau(\tau,t;x_k - x_0)dt\ d\tau = \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\int\limits_a^b q[x_0(t) + g(\tau,t;x_k - x_0)]^{q-1}\times$$
$$\times\ g'_\tau(\tau,t;x_k - x_0)d\tau l_{nk}(x(t))dt =$$
$$= \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\int\limits_a^b \frac{d}{d\tau}[x_0(t) + g(\tau,t;x_k - x_0)]^q d\tau l_{nk}(x(t))dt =$$
$$= \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left[l_{nk}(x(t))(x_k^q(t) - x_0^q(t))\right]dt,$$

то с учетом тождества

$$\sum_{k=0}^n l_{nk}(x(t))x_k^q(t) \equiv x^q(t),\ q = 0,\ 1,\ ...,\ n,$$

приходим к равенству $H_{n+m}(F;\ x) =$

$$= \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left[x_0^q(t) + \sum_{k=1}^n l_{nk}(x(t))(x_k^q(t) - x_0^q(t))\right]dt =$$

$$= \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left[\sum_{k=0}^n l_{nk}(x(t))x_k^q(t)\right]dt = \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}x^q(t)dt = F(x).$$

Для дальнейшего доказательства теоремы удобнее рассматривать операторы вида

$$\tilde{F}(x) = \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left[\omega_n(x(t))x^q(t)\right]dt, \tag{14}$$

где $\nu = 0,\ 1,\ ...,\ p;\ q = 0,\ 1,\ ...,\ m-1$.

Заметим, что если формула (10) точна для операторов (14), то она будет точна и для операторов $F(x)$ вида (13) при $q = n+1,\ n+2,\ ...,\ n+m$.

Так как дифференциал первого порядка $\delta\tilde{F}[x;\ h]$ для операторов (14) вычисляется по правилу

$$\delta\tilde{F}[x;\ h] = \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left\{\frac{d}{dx}\left[\omega_n(x(t))x^q(t)\right]h(t)\right\}dt,$$

то вторая сумма в правой части формулы (10) преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^n \int\limits_a^b \delta\tilde{F}[x_0(\cdot) + g(\tau,\cdot;x_k - x_0);\ l_{nk}(x(\cdot))g'_\tau(\tau,\cdot;x_k - x_0)]d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int\limits_a^b \int\limits_c^d c_q(s,\ t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left\{\frac{d}{dx}\Big\{\omega_n(x_0(t) + g(\tau,t;x_k - x_0))\times\right.$$

$$\left.\times\left[x_0(t) + g(\tau,t;x_k - x_0)\right]^q\Big\}l_{nk}(x(t))g'_\tau(\tau,t;x_k - x_0)\right\}dt\ d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{c}^{d} c_q(s,\ t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \Bigg\{ \int\limits_{a}^{b} \frac{d}{d\tau} \Big\{ \omega_n(x_0(t) + g(\tau, t; x_k - x_0)) \times$$

$$\times \left[x_0(t) + g(\tau, t; x_k - x_0)\right]^q \Big\} d\tau l_{nk}(x(t)) \Bigg\} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{c}^{d} c_q(s,\ t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left\{ \left[\omega_n(x_k(t)) x_k^q(t) - \omega_n(x_0(t)) x_0^q(t)\right] l_{nk}(x(t)) \right\} dt =$$

$$= \int\limits_{c}^{d} c_q(s,\ t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left\{ \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(x(t)) \left[\omega_n(x_k(t)) x_k^q(t)\right] \right\} dt - \tilde{F}(x_0) = 0.$$

Для операторов (14) дифференциал

$$\delta^{n+j} \tilde{F}[x;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+j}] =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} c_q(s,\ t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left[\psi_p(x(t)) h_1(t) h_2(t) \cdots h_{n+j}(t)\right] dt,$$

где $\psi_p(x(t))$ — алгебраический многочлен степени

$$p \quad (0 \le p = q - j + 1 < m)$$

относительно $x(t)$. Поэтому для первой суммы в (10) справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{m} \delta^{n+j} \tilde{F}[x_i;\ h_{nj}(x)] = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{c}^{d} c_q(s,\ t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left\{ \psi_p(x_i(t)) h_{nj}(x(t)) \right\} dt =$$

$$= \int\limits_{c}^{d} c_q(s,\ t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left\{ \sum_{j=1}^{m} h_{nj}(x(t)) \frac{d^{n+j}}{dx^{n+j}} \left[\omega_n(x_i(t)) x_i^q(t)\right] \right\} dt.$$

На основе доказанной леммы 1 для операторов (14) окончательно получаем

$$H_{n+m}(\tilde{F};\ x) = \int\limits_{c}^{d} c_q(s,\ t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(x(t)) \left[\omega_n(x_k(t)) x_k^q(t)\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} h_{nj}(x(t)) \frac{d^{n+j}}{dx^{n+j}} \left[\omega_n(x_i(t)) x_i^q(t)\right] \Bigg\} dt = \tilde{F}(x).$$

Теорема 1 доказана. □

В частности, если оператор $g(\tau, t; x) = \tau x(t)$, $t \in [a;\ b] = [0;\ 1]$, а $m = 1$, то формула (10) преобразуется в равенство

$$H_{n+1}(F;\ x) = L_n(F;\ x) + \frac{1}{(n+1)!} \delta^{n+1} F[x_i;\ \omega_n(x)], \qquad (15)$$

где интерполяционный операторный многочлен Лагранжа $L_n(F;\ x)$ имеет вид

$$L_n(F;\ x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \delta F[x_0 + \tau(x_k - x_0);\ l_{nk}(x)(x_k - x_0)] d\tau.$$

Для формулы (15) выполняются интерполяционные условия

$$H_{n+1}(F;\ x_k) = F(x_k)\ (k = 0,\ 1,\ ...,\ n);$$

$$\delta^{n+1} H_{n+1}[x_i;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+1}] = \delta^{n+1} F[x_i;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+1}].$$

Далее построим обобщенную интерполяционную формулу Эрмита—Биркгофа для скалярных функций. Пусть, как и ранее, заданы узлы интерполирования $t_0,\ t_1,\ ...,\ t_n$ — различные точки числовой оси, известны значения $f(t_0),\ f(t_1),\ ...,\ f(t_n)$ и значения производных $f^{(n+1)}(t_i),\ f^{(n+2)}(t_i),\ ...,\ f^{(n+m)}(t_i)$ в некотором фиксированном узле t_i $(0 \leq i \leq n)$ функции $f(t)$, $t \in R$. Требуется построить алгебраический многочлен $H_{n+m}(f,\ t) \equiv H_{n+m}(t)$ степени не выше $n+m$, для которого справедливы равенства (2) и выполняются условия

$$\tilde{D}_{n+m} H_{n+m}(t_i) = \tilde{D}_{n+m} f(t_i), \qquad (16)$$

где $\tilde{D}_{n+m} f(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{m} f^{(n+\nu)}(t)$.

Лемма 2. *Для алгебраического многочлена*

$$H_{n+m}(t) = \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(t) f(t_k) + h_{nm}(t) \tilde{D}_{n+m} f(t_i)$$

выполняются условия (2) *и* (16) .

Доказательство. Выполнение интерполяционных условий (2) и (16) следует из того, что $h_{nm}(t_\nu)=0$, $l_{nk}(t_\nu)=\delta_{k\nu}$, для $k,\ \nu=0,\ 1,\ ...,\ n$, а $\tilde{D}_{n+m}h_{nm}(t_i)=1$, $\tilde{D}_{n+m}l_{nk}(t)\equiv 0$ при $k=0,\ 1,\ ...,\ n$. □

Рассмотрим далее операторно-дифференциальные выражения

$$D_{n+m}F(x)\equiv D_{n+m}F[x;\ h]=\sum_{\nu=1}^{m}\delta^{n+\nu}F[x;\ h]. \tag{17}$$

Через $\delta^{n+\nu}F[x;\ h]$, как и ранее, обозначен дифференциал Гато $(n+\nu)$-го порядка по направлениям $h_1=h_2=...=h_{n+\nu-1}\equiv 1$, $h_{n+\nu}=h$.

Теорема 2. *Для операторного многочлена*

$$H_{n+m}(F;\ x)=F(x_0)+D_{n+m}F[x_i;\ h_{nm}(x)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_a^b \delta F[x_0(\cdot)+g(\tau,\cdot;x_k-x_0);\ l_{nk}(x(\cdot))g'_\tau(\tau,\cdot;x_k-x_0)]d\tau,$$

где $l_{nk}(x)\equiv l_{nk}(x(t))$ *и* $h_{nj}(x)\equiv h_{nj}(x(t))$ *такие же, как и в теореме* 1*, справедливы равенства* (11) *и выполняются условия*

$$D_{n+m}H_{n+m}(x_i)=D_{n+m}F(x_i). \tag{18}$$

Доказательство. Так как при $x=x_\nu$ верны равенства $l_{nk}(x_\nu)=\delta_{k\nu}$ и $h_{nj}(x_\nu)=0$ для $k,\ \nu=0,\ 1,\ ...,\ n$ и $j=1,\ 2,\ ...,\ m$, то, используя соотношение (9), получаем, что

$$H_{n+m}(F;\ x_k)=F(x_k)\quad (k=0,\ 1,\ ...,\ n).$$

Покажем справедливость условий (18). С учетом тождеств

$$D_{n+m}l_{nk}[x_i;\ h]\equiv 0\quad (k=0,\ 1,\ ...,\ n)$$

и равенств $D_{n+m}h_{nm}[x_i;\ h]=h$ получим для $D_{n+m}H_{n+m}[x_i;\ h]$ соотношение

$$D_{n+m}H_{n+m}[x_i;\ h]=D_{n+m}F[x_i;\ D_{n+m}h_{nm}[x_i;\ h]]=D_{n+m}F[x_i;\ h].$$

Теорема 2 доказана. □

3. Формулы, содержащие дифференциалы и интегралы Стилтьеса интерполируемого оператора

Построим далее интерполяционные операторные формулы иной структуры, содержащие дифференциалы и интегралы Стилтьеса интерполируемого оператора. Введем числовую функцию

$$\chi(\tau,\ t) = \begin{cases} b, & \tau \geq t; \\ a, & \tau < t, \end{cases}$$

где $a < \tau < b$, а $\chi(a,\ t) \equiv a$ и $\chi(b,\ t) \equiv b$. Через $Q_{n+m}(x)$ обозначим операторный многочлен вида

$$Q_{n+m}(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \int\limits_a^b a_k(s,\ t)x^k(t)dt, \tag{19}$$

где $a_k(s,\ t)$ — некоторые заданные функции

$$(s \in R^\alpha, \alpha \in \mathrm{N};\ t \in [a;\ b]\,;\ k = 0,\ 1,\ ...,\ n+m).$$

Теорема 3. *Для операторного многочлена*

$$H_{n+m}(F;\ x) = F(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \delta^{n+j} F[x_i;\ h_{nj}(x)] + \tag{20}$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b l_{nk}[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau,\ \cdot), \cdot; x_k - x_0)],$$

где $l_{nk}(x) \equiv l_{nk}(x(t))$ и $h_{nj}(x) \equiv h_{nj}(x(t))$ такие же, как и в теореме 1, а для оператора $g(\tau,\ t; x)$ имеют место соотношения (8), будут выполняться интерполяционные условия (11) и (12). Если $F(x) = Q_{n+m}(x)$ — операторный многочлен вида (19), то

$$H_{n+m}(F;\ x) \equiv Q_{n+m}(x).$$

Доказательство. При $x = x_\nu$ справедливы равенства

$$h_{nj}(x_\nu) = 0, \quad l_{nk}(x_\nu) = \delta_{k\nu}$$

для всех $j = 1,\ 2,\ ...,\ m$ и $k,\ \nu = 0,\ 1,\ ...,\ n$. Следовательно,

$$H_{n+m}(F;\ x_\nu) = F(x_0) + \int\limits_a^b d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau,\ \cdot), \cdot; x_\nu - x_0)] = F(x_\nu),$$

где $\nu = 0,\ 1,\ ...,\ n$. Учитывая, как и ранее, тождества

$$\delta^{n+j} l_{nk}[x;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+j}] \equiv 0$$

при $k = 0,\ 1,\ ...,\ n$ и равенства

$$\delta^{n+j} h_{n\nu}[x_i;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+j}] = \delta_{\nu j} h_1(t) h_2(t) \cdots h_{n+j}(t)$$

для $\nu,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m$ приходим к соотношениям (12).

Пусть оператор

$$F(x) = \int\limits_a^b a_q(s,\ t) x^q(t) dt, \tag{21}$$

где степень $q = 0,\ 1,\ ...,\ n$, тогда первая сумма в (20) обратится в нуль, так как порядок дифференциала $n + j > q$.

Для k-го слагаемого второй суммы в (20) и этого класса операторов с учетом свойств функции $\chi(\tau,\ t)$ будет выполняться равенство

$$\int\limits_a^b l_{nk}[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau,\ \cdot), \cdot; x_k - x_0)] = \int\limits_a^b l_{nk}[x(\tau)] d_\tau \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_a^\tau a_q(s,\ t) x_k^q(t) dt + \int\limits_\tau^b a_q(s,\ t) x_0^q(t) dt \right\} =$$

$$= \int\limits_a^b a_q(s,\ \tau) l_{nk}[x(\tau)] \left\{ x_k^q(\tau) - x_0^q(\tau) \right\} d\tau.$$

Отсюда

$$H_{n+m}(F;\ x) = \int\limits_a^b a_q(s,\ t) \left[x_0^q(t) + \sum_{k=1}^{n} l_{nk}[x(t)] \left\{ x_k^q(t) - x_0^q(t) \right\} \right] dt =$$

$$= \int_a^b a_q(s,\ t) \sum_{k=0}^{n} l_{nk}[x(t)] x_k^q(t) dt = \int_a^b a_q(s,\ t) x^q(t) dt = F(x).$$

Для дальнейшего доказательства теоремы, как и раньше, удобнее рассматривать операторы вида

$$\tilde{F}(x) = \int_a^b a_q(s,\ t)\omega_n(x(t)) x^q(t) dt \ (\ q = 0,\ 1,\ ...,\ m-1). \qquad (22)$$

Заметим, что если формула (20) точна для операторов (22), то она будет точна и для операторов $F(x)$ вида (21) при

$$q = n+1,\ n+2,\ ...,\ n+m.$$

Для операторов (22) вторая группа слагаемых правой части формулы (20) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b l_{nk}[x(\tau)] d_\tau \tilde{F}[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau,\ \cdot), \cdot; x_k - x_0)] =$$

$$= \int_a^b a_q(s,\ t) \sum_{k=1}^{n} l_{nk}[x(t)] \left\{ \omega_n(x_k(t)) x_k^q(t) - \omega_n(x_0(t)) x_0^q(t) \right\} dt = 0.$$

Дифференциал $\delta^{n+j}\tilde{F}[x;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+j}]$ операторов этого вида вычисляется по правилу

$$\delta^{n+j}\tilde{F}[x;\ h_1,\ h_2,\ ...,\ h_{n+j}] =$$

$$= \int_a^b a_q(s,\ t)\psi_p(x(t)) h_1(t) h_2(t) \cdots h_{n+j}(t) dt,$$

где $\psi_p(x(t))$ — алгебраический многочлен степени

$$p \quad (0 \le p = q - j + 1 < m)$$

относительно $x(t)$. Поэтому для первой суммы в (20) справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{m} \delta^{n+j}\tilde{F}[x_i;\ h_{nj}(x)] = \sum_{j=1}^{m} \int_a^b a_q(s,\ t)\psi_p(x_i(t)) h_{nj}(x(t)) dt =$$

$$= \int\limits_a^b a_q(s,\ t) \left\{ \sum_{j=1}^{m} h_{nj}(x(t)) \frac{d^{n+j}}{dx^{n+j}} \left[\omega_n(x_i(t)) x_i^q(t)\right] \right\} dt.$$

На основе доказанной леммы 1 для операторов (22) окончательно получаем

$$H_{n+m}(\tilde{F};\ x) = \int\limits_a^b a_q(s,\ t) \Bigg\{ \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(x(t)) \left[\omega_n(x_k(t)) x_k^q(t)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} h_{nj}(x(t)) \frac{d^{n+j}}{dx^{n+j}} \left[\omega_n(x_i(t)) x_i^q(t)\right] \Bigg\} dt = \tilde{F}(x).$$

Теорема 3 доказана. □

В случае аналогичной обобщенной интерполяционной задачи Эрмита—Биркгофа справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Для операторного многочлена*

$$H_{n+m}(F;\ x) = F(x_0) + D_{n+m} F[x_i;\ h_{nm}(x)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b l_{nk}[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau,\ \cdot), \cdot; x_k - x_0)],$$

где $l_{nk}(x) \equiv l_{nk}(x(t))$ *и* $h_{nj}(x) \equiv h_{nj}(x(t))$ *такие же, как и в теореме* 1, *справедливы равенства* (11) *и* (18).

Доказательство. Учитывая значения функций $l_{nk}(x)$ и $h_{nj}(x)$ в узлах интерполирования x_ν, как и ранее получим, что

$$H_{n+m}(F;\ x_\nu) = F(x_0) + \int\limits_a^b d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau,\ \cdot), \cdot; x_k - x_0)] = F(x_\nu).$$

Проверка справедливости условий (18) аналогична рассуждениям, приведенным при доказательстве теоремы 2. □

Пример. Пусть

$$F(x) = \int_a^b K[s, t, x(t)]dt$$

— оператор Урысона, узлы интерполирования

$$x_k(t) \in C[a, b], \quad k = 0,\ 1,\ ...,\ n.$$

Тогда

$$\delta^\nu \tilde{F}[x;\ h] = \int_a^b K_x^{(\nu)}[s, t, x(t)]h(t)dt, \quad \nu = 1,\ 2,\ ...,\ n+m,$$

и интерполяционный многочлен Эрмита—Биркгофа (10), где оператор $g(\tau, t; x) = \tau x(t)$, $t \in [0;\ 1]$, примет вид

$$H_{n+m}(F;\ x) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b K[s, t, x_k(t)]l_{nk}(x(t))dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_a^b K_x^{(n+j)}[s, t, x_i(t)]h_{nj}(x(t))dt.$$

Нетрудно заметить, что полученный многочлен удовлетворяет интерполяционным условиям (11) и (12), где x_i — один из фиксированных узлов интерполирования.

В заключение отметим, что достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографии [7], в которой, в частности, рассмотрены и специальные случаи интерполяционной задачи Эрмита—Биркгофа.

Список литературы

[1] *Янович, Л.А.* О взаимосвязи интерполирования операторов и функций / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко // Докл. НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42. – № 3. – С. 9–16.

[2] *Янович, Л.А.* Специальные случаи полиномиального операторного интерполирования Эрмита—Биркгофа / Л.А. Янович, В.В. Дорошко // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45. – № 4. – С. 15–20.

[3] *Янович, Л.А.* Об одном классе формул операторного интерполирования Эрмита—Биркгофа в пространстве дифференцируемых функций / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2005. – № 2. – С. 11–16.

[4] *Жидков, Н.П.* Линейные аппроксимации функционалов / Н.П. Жидков. – М.: Московский университет, 1977. – 262 с.

[5] *Ибрагимов, И.И.* Методы интерполяции функций и их некоторые применения / И.И. Ибрагимов. – М.: Наука, 1971. – 518 с.

[6] *Турецкий, А.Х.* Теория интерполирования в задачах / А.Х. Турецкий. – Минск: Вышэйшая школа, 1968. – 318 с.

[7] *Макаров, В.Л.* Интерполирование операторов / В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов, Л.А. Янович. – Киев: Наукова думка, 2000. – 407 с.

Янович Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Беларуси, Институт математики НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь, `yanovich@im.bas-net.by`.

Игнатенко Марина Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, `ignatenkomv@bsu.by`.