ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

А. И. Рыжиков

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие методов исследования зависимости между локальными и глобальными свойствами ориентированных графов, начатого в [2, 3].

В работе рассмотрены два обобщения понятия локально связного графа на случай ориентированных графов: локально сильные орграфы и (L, R)-сильные орграфы. Установлены достаточные условия того, чтобы орграф был локально сильным или (L, R)-сильным. Исследовано влияние локальной структуры орграфа на такую его глобальную характеристику, как связность. Показано, что множество сильных локально сильных асимметрических орграфов, максимальная степень вершин которых не превосходит 4, конечно, и все такие орграфы содержат гамильтонов контур. Следует отметить, что в общем случае задача о гамильтоновом контуре в сильном орграфе, степени вершин которого не превышают 4, является NP-полной [5].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [1]. Пусть G – конечный ориентированный граф (орграф) без петель и кратных дуг с множеством вершин $V(G)$ и множеством дуг $A(G)$. *Порядком* орграфа G называется число его вершин, т. е. $|V(G)|$. Орграф называется *тривиальным*, если его порядок равен 1.

Орграф G называется *сильным*, если для любых двух его вершин u и v в G существует как путь из u в v, так и путь из v в u. Пусть $n \geq 1$ – натуральное число. Орграф называется *n-сильным*, если удаление из него менее, чем n вершин приводит к сильному нетривиальному орграфу. *Основанием* орграфа G называется граф, полученный заменой каждой дуги $(u,v) \in A(G)$ на ребро uv и удалением из полученного мультиграфа кратных ребер. Орграф называется *слабым*, если его основание – связный граф. Орграф называется *асимметрическим*, если из того, что он содержит дугу (u, v) следует, что он не содержит дуги (v, u).

Окружением вершины v в орграфе G называется множество всех вершин, смежных с v, т. е. таких вершин u, что $(u,v) \in A(G)$ или $(v,u) \in A(G)$. Орграф называется *локально сильным* (соответственно, *ло-*

кально n-сильным), если окружение каждой его вершины порождает сильный (соответственно, n-сильный) подграф.

Исходящим (соответственно, *входящим*) *окружением вершины* v в орграфе G называется множество $N^+(v)$ (соответственно, $N^-(v)$) всех таких вершин u, что $(v,u)\in A(G)$ (соответственно, $(u,v)\in A(G)$). *Полустепенью исхода* (соответственно, *захода*) вершины v называется число $|N^+(v)|$ (соответственно, $|N^-(v)|$). Полустепень исхода вершины v обозначается $\mathrm{od}(v)$, полустепень захода – $\mathrm{id}(v)$. Орграф называется *(L, R)-сильным* (соответственно, *(L, R)-n-сильным*), если входящее и исходящее окружения каждой его вершины порождают сильные (соответственно, n-сильные) подграфы.

3. ЛОКАЛЬНО СИЛЬНЫЕ ОРГРАФЫ

В [2] анонсировано достаточное условие того, чтобы орграф был локально n-сильным. Приведем здесь его доказательство.

Теорема 1. Пусть G – орграф порядка $p\ge 3$, для любых двух различных вершин x и y которого верно неравенство

$$\mathrm{od}(x)+\mathrm{id}(y)>\frac{4}{3}\left(p+\frac{n-3}{2}\right),$$

где $1\le n\le p-2$. Тогда G – локально n-сильный.

Доказательство. Допустим, что G удовлетворяет условию теоремы, но существует вершина $v\in V(G)$, окружение которой порождает подграф, не являющийся n-сильным. Обозначим через N подграф, порожденный окружением вершины v. Возможны два случая: либо N – полный подграф на $j\le n$ вершинах (т. е. такой, что из любой его вершины есть дуга в любую другую), либо в N найдется разделяющее множество T из менее, чем n вершин.

Рассмотрим первый случай. Пусть u – произвольная вершина, не смежная с v. Вершина u существует, поскольку $j\le n\le p-2$. Тогда $\mathrm{od}(v)+\mathrm{id}(v)\le 2j\le 2n$ и $\mathrm{od}(u)+\mathrm{id}(u)\le 2(p-2)$. Отсюда и из условия теоремы $\frac{8}{3}\left(p+\frac{n-3}{2}\right)<\left(\mathrm{od}(v)+\mathrm{id}(u)\right)+\left(\mathrm{id}(v)+\mathrm{od}(u)\right)\le 2p+2n-4$. Следовательно, $n>p$. Получили противоречие.

Теперь рассмотрим второй случай. В этом случае орграф $N-T$ не является сильным. Обозначим через M_1 сильную компоненту, из которой не выходит дуг в $N-T-M_1$ (в качестве такой компоненты можно взять, например, компоненту, соответствующую концу самой длинной цепи в конденсации $N-T$), а через M_2 – множество $N-T-M_1$. Пусть $u \in M_1$, $w \in M_2$ – некоторые вершины. Обозначим через t, m_1 и m_2 мощности множеств T, M_1 и M_2 соответственно. Тогда $\mathrm{od}(u) \le m_1 + t + k$, $\mathrm{od}(v) + \mathrm{id}(v) \le 2(m_1 + m_2 + t)$ и $\mathrm{id}(w) \le m_2 + t + k$, где $k = p - 1 - m_1 - m_2 - t$. Отсюда находим

$$\mathrm{od}(v) + \mathrm{id}(v) + 2\mathrm{od}(u) + 2\mathrm{id}(w) \le 4m_1 + 4m_2 + 4k + 6t \le 4p + 2n - 6.$$

С другой стороны, по условию теоремы заключаем, что $\left(\mathrm{id}(v) + \mathrm{od}(u)\right) + \left(\mathrm{od}(v) + \mathrm{id}(w)\right) + \left(\mathrm{od}(u) + \mathrm{id}(w)\right) > 4p + 2n - 6$. Снова получили противоречие.

4. (*L*, *R*)-СИЛЬНЫЕ ОРГРАФЫ

В [2] показано, что всякий сильный локально n-сильный орграф является $(n+1)$-сильным. Аналогичное утверждение верно и для (L, R)-n-сильных орграфов. При этом всякий сильный асимметрический цикл является сильным и (L, R)-сильным, но не 2-сильным. Как следует из приведенных ниже леммы и теоремы 2, все другие сильные (L, R)-сильные орграфы являются 2-сильными.

Лемма. Если слабый (L, R)-сильный орграф G порядка $p \ge 3$ содержит такую вершину v, что $\mathrm{id}(v) = 1$ или $\mathrm{od}(v) = 1$, то G – ориентированный сильный асимметрический цикл.

Теорема 2. Пусть G – сильный (L, R)-n-сильный орграф, и пусть $\mathrm{od}(v) \ge 2$ и $\mathrm{id}(v) \ge 2$ для любой вершины $v \in V(G)$. Тогда G является $(n+1)$-сильным.

Приведем теперь две теоремы, которые показывают, что свойства (L, R)-сильных орграфов во многом совпадают со свойствами локально сильных орграфов.

Теорема 3. Пусть G – (L, R)-сильный орграф и пусть $\mathrm{od}(v) \ge 2$, $\mathrm{id}(v) \ge 2$ для любой вершины $v \in V(G)$. Тогда основание орграфа G является локально связным графом.

Теорема 4. Пусть G – ориентированный граф порядка $p \ge 3$, для любой вершины v которого верны неравенства

$$\mathrm{od}(v) > \frac{2}{3}\left(p + \frac{n-3}{2}\right) \text{ и } \mathrm{id}(v) > \frac{2}{3}\left(p + \frac{n-3}{2}\right),$$

где $1 \le n \le p - 2$. Тогда G – (L, R)-n-сильный орграф.

Отметим, что на данный момент, кроме асимметрических сильных циклов, нам не известно никаких других (L, R)-сильных орграфов, которые бы не были локально сильными. В связи с этим сформулируем следующую гипотезу:

Гипотеза. Всякий (L, R)-сильный орграф, полустепени исхода и захода каждой вершины которого не меньше двух, является локально сильным.

5. ЦИКЛИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

В [4] доказано, что связный локально связный граф H порядка $p \geq 3$ с $\Delta(H) \leq 4$ либо гамильтонов, либо изоморфен $K_{1,1,3}$. Пусть G – асимметрический орграф. Степенью вершины v в таком орграфе называется число $\deg v = \mathrm{od}(v) + \mathrm{id}(v)$. Обозначим через $\Delta(G)$ наибольшую степень вершины в асимметрическом орграфе G.

Теорема 5. Пусть G – сильный локально сильный асимметрический орграф порядка $p \geq 3$ и $\Delta(G) \leq 4$. Тогда G есть единственная асимметрическая ориентация либо графа C_5^2, либо графа C_6^2.

Литература

1. Лекции по теории графов / *В. А. Емеличев* [и др.]. // М.: Наука, 1990. 384 с.
2. *Chen Z.* On locally *n*-(arc)-strong digraphs // Ars Comb. 1994. V. 38. P. 27–31.
3. *Chen Z.* Local connectedness of digraphs // Graph theory, combinatorics, algorithms and applications. Vol. 1. Proc. of the seventh quadrennial international conference on the theory and applications of graphs, Kalamazoo, MI, USA, June 1–5, 1992. New York, NY: Wiley. P. 195–200. 1995.
4. *Chartrand G. Pippert R.* Locally connected graphs // Čas. Pěst. Mat. 1974. V. 99. P. 158–163.
5. *Plesnik J.* The NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem in planar digraphs with degree bound two // Inf. Process. Lett. 1979. V. 8. P. 199–201.

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ РАСПОЗНАВАНИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ПРИНЦИПЕ ПОДОБИЯ, И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

С. В. Силаев

В большинстве прикладных задач многие характеристики объектов реального мира достаточно просто описываются количественными характеристиками. Измерять степень сходства таких объектов по их исходным численным характеристикам существенно проще, чем формировать признаковые описания. Например, такие сложные объекты как гра-