

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУСТЕННОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ, ОСНОВАННОЕ НА НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. Н. Шейко

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе проводится анализ собственных частот колебаний двустенной углеродной нанотрубки (ДУНТ), находящейся в упругой среде. ДУНТ моделируется системой вложенных ортотропных цилиндрических оболочек. В качестве исходных уравнений, описывающих движение двустенной нанотрубки, приняты уравнения типа Флюгге [1]. Данная модель учитывает начальные напряжения, возникающие под действием внешних сил и окружающей упругой среды. Из-за неприменимости законов классической механики к наноразмерным структурам, при формулировке уравнений физического состояния используется не-локальная теория упругости Эрингена [2]. Указанная теория предполагает, что напряженное состояние в данной точке является функцией зависящей от деформаций в каждой точке тела. Теория упругости Эрингена включает в себя эффект масштаба и дальнего атомного взаимодействия.

Поскольку нанотрубки часто используются в качестве наполнителей для новых композиционных материалов, важно изучить воздействие окружающей упругой среды на ее динамическое поведение. Далее, упругая среда будет моделироваться Винклеровским основанием.

При изучении движения ДУНТ нужно учитывать взаимное влияние слоев. Это влияние заключается в возникновении межатомных сил, между слоями ДУНТ, называемых силами Ван-дер-Ваальса.

Погрешность используемой здесь модели составляет величину порядка [3] $\sim \max_{j=1,2} \left\{ h_j / R_j^2, (e_0 a / R_1)^2 \right\}$, где $a \approx 0.14 \text{ nm}$ – характерный внутренний размер решетки, а R_1 – радиус вложенной трубки.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Для описания двустенной углеродной нанотрубки используем механическую систему, состоящую из двух концентрически вложенных цилиндрических оболочек. Введем ортогональную систему координат x и

φ , где x – осевая координата, а φ – угол. В качестве уравнений движения системы концентрически вложенных трубок используем уравнения типа Флюгге [1]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{j,1}}{\partial x} + \frac{\partial S_j}{\partial \varphi} + \frac{T_{j,2}^0}{R_j} \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) + \frac{T_{j,1}^0}{R_j} \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial S_j^0}{R_j} \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial \varphi} - \\
& - R_j \rho_j h_j \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial T_{j,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_j}{\partial x} - \frac{1}{R_j} \frac{M_{j,2}}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_j} \frac{\partial H_j}{\partial x} + \frac{T_{j,2}^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial \varphi} \right) + \\
& + \frac{T_{j,1}^0}{R_j} \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} + 2 \frac{S_j^0}{R_j} \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) - R_j \rho_j h_j \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial^2 M_{j,2}}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 H_j}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_{j,1}}{\partial x^2} + R_j T_{j,2} - T_{j,2}^0 \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \varphi^2} \right) - \\
& - T_{j,1}^0 \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} + 2 S_j^0 \left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x \partial \varphi} \right) - \\
& - R_j^2 \left[p_{j(j+1)}^*(x, \varphi) - \frac{R_{j-1}}{R_j} p_{(j-1)j}^*(x, \varphi) \right] + R_j \rho_j h_j \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial t^2} = 0, \quad j=1,2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Где $p_{01}^* = 0$, $p_{12}^* = c^* (u_{2,3} - u_{1,3})$ – силы Ван-дер-Ваальса между стенками трубки, $c^* = \frac{200}{0.16 \pi a^2} \text{erg} / \text{cm}^2$, $d = 0.142 \text{nm}$ – внутренний характерный размер решетки нанотрубки, $p_{23}^* = -\kappa^*(x, \varphi) u_{2,3}$ – усилия, действующие со стороны окружающей матрицы на внешний слой нанотрубки.

Усилия и моменты в (1) выражаются через перемещения в соответствии с классической моделью макроскопических оболочек [4]. В соответствии с нелокальной континуальной теорией Эрингена [2] *микроскопические* и *макроскопические* напряжения связаны соотношениями:

$$\mathfrak{S}_j(T_{j,i}, S_j, M_{j,2}, H_j) = (T_{j,i}^{(m)}, S_j^{(m)}, M_{j,i}^{(m)}, H_j^{(m)}) \tag{2}$$

где \mathfrak{S}_j – дифференциальный оператор, действующий по формуле:

$$\mathfrak{I}_j = 1 - \left(\frac{e_0 a}{R_j} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) = 1 - e_0^2 \mu_j^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right), \mu_j = \frac{a}{R_j}, j = 1, 2. \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь e_0 – материальная константа нелокальности. Действуя на уравнения (1) оператором (2), и подставляя соотношения, связывающие усилия и перемещения, получим уравнения движения в перемещениях:

$$\sum_{j=1}^3 \left(\mu^4 \zeta_n M_{n,ij} + L_{n,ij} \right) u_{n,j} - \delta_n \mathfrak{I}_n \frac{\partial^2 u_{n,i}}{\partial t^2} - \mathfrak{I}_n \left[\hat{c}_{n+1,i} (u_{n+1,i} - u_{n,i}) - \hat{c}_{n,i} (u_{n,i} - u_{n-1,i}) + \hat{q}_{n,i} \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2.$$

где

$$\mu^4 = \frac{h_N^2}{12R^2}, \quad \zeta_n = \left(\frac{h_n}{h_N} \right)^2, \quad \delta_n = \left(\frac{\omega_N}{\omega_n} \right)^2, \quad \omega_n^2 = \frac{E_n^*}{\rho_n R^2},$$

$$E_n^* = \frac{2E_{n,1} \nu_{n,2}}{\nu_{n,1} + \nu_{n,2}}, \quad \hat{c}_{n,i}(x) = \frac{R^2 c_{n,i}}{h_n E_n^*}, \quad \hat{q}_{n,i}(x, \phi, \hat{t}) = \frac{R^2 q_{n,i}}{h_n E_n^*}.$$

а $L_{n,ij}$, $M_{n,ij}$ – матричные дифференциальные операторы размерности 3×3 с элементами $L_{n,ij}$ и $M_{n,ij}$ соответственно.

СВОБОДНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В качестве примера рассмотрены свободные осесимметричные колебания ДУНТ с учетом начальных напряжений. Примем следующие значения параметров [5]:

$$E_1 = E_2 = 1.058 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.27, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1.341 \times 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$h_1 = h_2 = 0.34 \times 10^{-9} \text{ м}, \quad R_1 = 1.735 \times 10^{-9} \text{ м}, \quad R_2 = 2.415 \times 10^{-9} \text{ м}.$$

Исследования показали, что в данном случае ДУНТ будет иметь две собственные формы колебаний: стенки движутся в одном и в разных направлениях (см. рис. 1 и рис. 2).

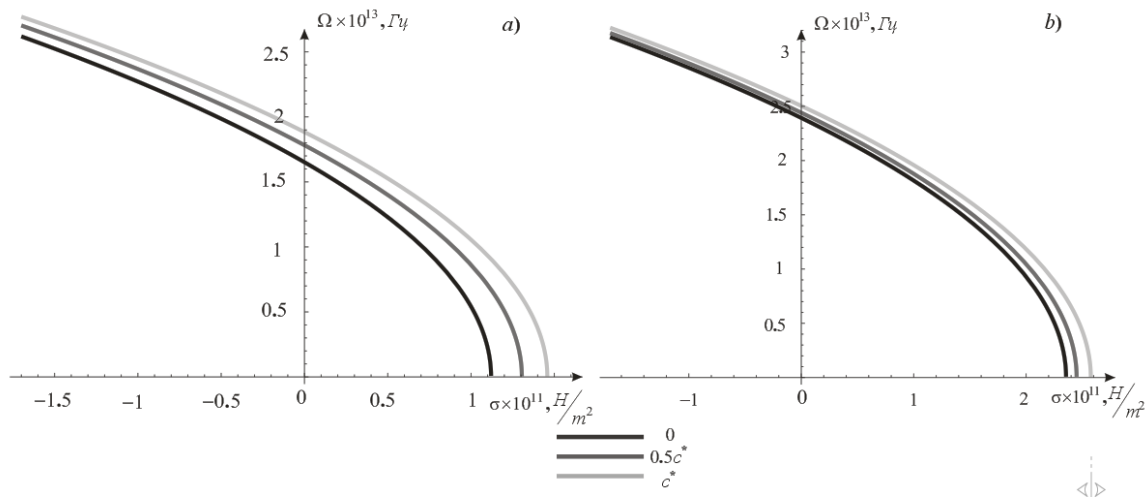


Рис. 1. Значения Ω (собственные частоты нанотрубки, соответствующие: а) I-й б) II-й форме колебаний) от σ (начальных напряжений в осевом направлении), при различных коэффициентах постели, где $m=5$; $e_0=0$

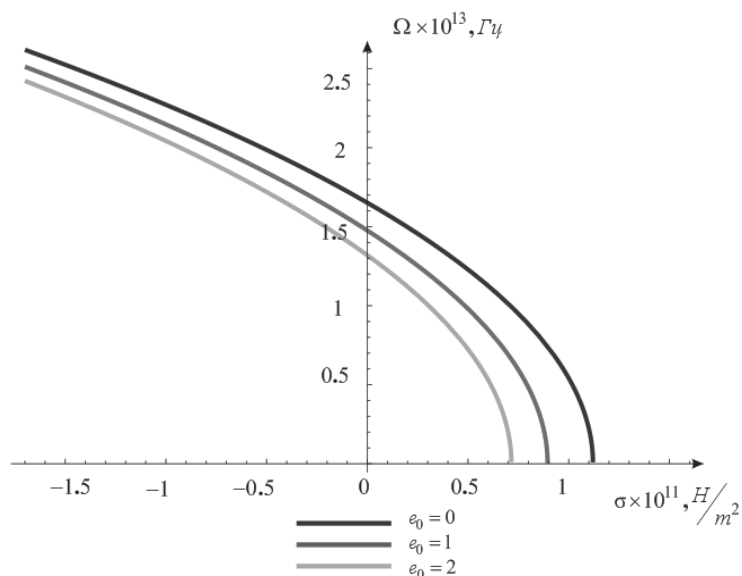


Рис. 2. Значения Ω (собственных частот нанотрубки, соответствующих I-й форме колебаний) от σ (начальных напряжений в осевом направлении), при различных коэффициентах упругой нелокальности, где $m=5$; $e_{33}=0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены уравнения движения ДУНТ в перемещениях. В качестве примера произведен анализ собственных частот симметричных колебаний ДУНТ от начальных напряжений в осевом направлении, при различных коэффициентах постели и параметрах нелокальности. Замечено, что увеличение упругости среды, окружающей нанотрубку, приводит к росту ее собственных частот. Учет структуры нанотрубки, полученный

использованием теории упругости Эрингена, приводит к снижению собственных частот.

Литература

1. *Flügge W.* Statik und Dynamik der Schalen (Springer, Berlin, 1934). 54, P. 4703–4710. 1983.
2. *Eringen A. C.* On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *J. Appl. Phys.* 54, P. 4703–4710. 1983.
3. *Михасев Г. И.*, Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки, основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек, Доклады НАН Беларуси. 011. Т. 55, № 6. С. 119–123.
4. *Михасев Г. И.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г. И. Михасев, П. Е. Товстик // Асимптотические методы. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009.
5. *Usuki T. and Yogo K.*, Beam equations for multi-walled carbon nanotubes derived from Flügge shell theory, *Proc. R. Soc. A* 465, P. 1199–1226. 2009.