а также и их пересечение $\bigcap_{i=1}^{s} X_i(t,\varphi_i)$ есть внешняя оценка множества достижимости. Функционалы $m_i(t,\varphi_i)$ и $\mu_i(t,\varphi_i)$ определяются так:

$$m_i(t,\varphi_i) = \inf_{\substack{x_0\in X_0 \\ x_1\in X(t,\varphi_i)}} (\varphi_i(t,x_1) - \varphi_i(t_0,x_0)F_i(t,x_1)),$$

$$\mu_i(t,\varphi_i) = \sup_{\substack{u\in U_t \\ x\in X(t,\varphi_i)}} (\varphi'_{ix}(t,x)f(t,x,u) + \varphi_{it}(t,x)).$$

Хотелось бы обратить внимание на то, как в общем случае определяются эти функционалы. Отсюда, же вытекают и более простые способы определения множеств $X_i(t,\varphi_i)$. Таким образом, заменяя в определении функционалов $m(\varphi)$ и $\mu(t,\varphi)$ множества $X_*(t)$ на $X_i(t,\varphi_i)$ или их пересечение, получаем внутренне замкнутую задачу об уточнении оценки точкой нижней грани функционала $F(x(t_1))$ в задаче оптимального управления для которой справедливы результаты [1]. При этом появляется дополнительная возможность уточнять и сами оценки множеств достижимости $X_i(t,\varphi_i)$. Тем более, что алгоритмы этого уточнения, по сути, идентичны алгоритму решения задачи $l(\varphi) \to \sup_{\varphi}$.

В докладе приводится пример уточнения оценки точной нижней грани функционала в задаче оптимального управления с некомпактным множеством достижимости. Улучшающая последовательность $\{\varphi^k\}$ позволяет достичь $\sup_{\varphi} l(\varphi) = \inf_{x(\cdot)} F(x(t_1))$, хотя в самой задаче оптимального управления в качестве оптимального управления выступает скользящий режим и отвечающие ему траектории.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00741.

Список литературы

1. *Сидоренко Г.В.* Уточнение оценки нижней грани функционала в задаче оптимального управления // Компьютерная алгебра и интеллектуальное управление. Проблемы анализа стратегической стабильности. Иркутск, ВУ СО РАН, 1995. С. 98–117.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

В.А. Срочко

Иркутский госуниверситет, ИМЭИ, К. Маркса, 1, 664003 Иркутск, Россия
srochko@math.isu.ru

Рассматривается обыкновенная динамическая задача оптимизации, линейная по управлению с ограничением в форме включения относительно выпуклого компактного множества. В известных методах фазовой аппроксимации первого и второго порядков [1] традиционно используется процедура разовой (однократной) минимизации соответствующей вариации целевого функционала (для обеспечения неотрицательности) с последующим поиском параметра варьирования для улучшения рассматриваемого управления в рамках исходной задачи. В докладе предлагается более логичный и перспективный вариант конструирования методов на основе решения (по крайней мере, локального) вспомогательной задачи на минимум аппроксимации. Решение этой задачи следует проводить в некоторой окрестности исходного управления. Существенной является проблема формирования таких окрестностей. В этой части выбор сделан в пользу традиционной схемы варьирования в форме обобщенной выпуклой комбинации управлений. При этом охватываются, по крайней мере, два типа окрестностей – слабая (в норме L_∞) и игольчатая (по мере несовпадения управлений). Важно подчеркнуть, что при такой формализации ограничения на управление в исходной и вспомогательной задачах не изменяются. Это, в определенной мере, обеспечивает возможность эффективного решения вспомогательной задачи. Второй существенный фактор связан с расширением потенциала улучшения – предлагаемые методы позволяют, вообще говоря, улучшать экстремальные (в частности, особые) управления, что открывает дополнительные возможности глобального решения невыпуклых задач оптимального управления.

Сформулируем основную задачу оптимального управления (задача A)

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x,u,t)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = f(x,u,t),\ x(t_0) = x^0,\ u(t) \in U,\ t \in T = [t_0, t_1].$$

Внесем необходимые предположения:
1) терминальная функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^n;
2) подинтегральная функция $F(x,u,t)$ и вектор-функция $f(x,u,t)$ правых частей фазовой системы непрерывно дифференцируемы по $x \in R^n$, линейно зависят от $u \in R^r$ и кусочно-непрерывны по $t \in T$;
3) множество $U \subset R^r$ выпукло и компактно.

Класс допустимых управлений V в задаче A введем как множество кусочно-непрерывных вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих ограничению $u(t) \in U$, $t \in T$.

Определим типовые конструкции для задачи A:

$$H(\psi,x,u,t) = \langle \psi, f(x,u,t)\rangle - F(x,u,t) \ \text{– функция Понтрягина},$$

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi,x,u,t),\ \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) \ \text{– сопряженная система}.$$

Пусть $u(t)$, $t \in T$ – допустимое управление с фазовой траекторией $x(t)$ и решением $\psi(t)$ сопряженной системы. Как известно, принцип максимума в задаче A представляется соотношением

$$u(t) = \arg\max_{v\in U} \langle H_u(\psi(t), x(t), t), v\rangle,\ t \in T.$$

Базовой аппроксимацией предлагаемого подхода является фазовая вариация функционала Φ, которую на паре управлений $u, w \in V$ нетрудно определить следующим выражением

$$\delta\Phi(u,w) = \langle \varphi_x(x(t_1)), y(t_1)\rangle + \int_T \Big(\langle F_x(x(t), w(t), t), y(t)\rangle - \langle F_u(x(t),t), w(t) - u(t)\rangle \Big) dt,$$

$$\dot{y} = f_x(x(t), w(t), t)y + f_u(x(t),t)(w(t) - u(t)),\ y(t_0) = 0.$$

Для формирования вспомогательной задачи образуем семейство управлений с параметром $\alpha \in [0,1]$ по одному из двух правил:
1) стандартная выпуклая комбинация

$$w(t,v,\alpha) = u(t) + \alpha(v(t) - u(t)),\ t \in T,\ v(\cdot) \in V;$$

2) обобщенная выпуклая комбинация

$$w(t,v,\chi) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)),\ t \in T,\ v(\cdot) \in V,\ \chi(\cdot) \in X_\alpha$$

с множеством функций варьирования

$$X_\alpha = \left\{ \chi(\cdot) \in PC(T):\ \chi(t) = 0 \vee 1,\ \int_T \chi(t)dt = \alpha(t_1 - t_0) \right\}.$$

Для заданного $\alpha \in (0,1]$ введем два подмножества допустимых управлений

$$W_1(\alpha) = \{w(\cdot, v, \alpha),\ v \in V\},\ W_2(\alpha) = \{w(\cdot, v, \chi),\ v \in V,\ \chi \in X_\alpha\}.$$

Множество $W_1(\alpha) \subset V$ содержит элементы из слабой окрестности (в норме $L_\infty(T)$) исходного управления $u(t)$:

$$\|w(\cdot, v, \alpha) - u(\cdot)\|_\infty \leq \alpha D,\ D = \text{diam}\, U.$$

Множество $W_2(\alpha) \subset V$ формирует «игольчатую» окрестность этого же управления:

$$\text{mes}\{t \in T : w_\alpha(t, v, \chi) \neq u(t)\} \leq \alpha(t_1 - t_0).$$

Вспомогательные задачи методов имеют вид

$$\delta\Phi(u, w) \to \min,$$

1) $w \in W_1(\alpha)$ (задача $B_1(\alpha)$, метод слабого варьирования),
2) $w \in W_2(\alpha)$ (задача $B_2(\alpha)$, метод игольчатого варьирования).

Пусть $w_\alpha^{(i)}(t)$, $t \in T$ – экстремальное управление в задаче $B_i(\alpha)$, $i = 1, 2$. Параметр α корректируется с целью обеспечения спуска по функционалу задачи A: $\Phi(w_\alpha^{(i)}) \leq \Phi(u)$. Доказательство проводится по аналогии с [2]. При этом управление $w_\alpha^{(i)}(t)$ является очередным приближением метода.

Корректность метода обусловлена следующим **утверждением**:
если управление $u(t)$, $t \in T$ не удовлетворяет принципу максимума в задаче A, то для достаточно малых $\alpha \in (0, 1]$ выполняется свойство улучшения: $\Phi(w_\alpha^{(i)}) < \Phi(u)$, $i = 1, 2$.

Отметим, что вспомогательные задачи $B_i(\alpha)$ являются билинейными по совокупности «состояние (y), управление (v)», поэтому предлагаемые процедуры относятся к классу методов билинеаризации.

Список литературы

1. *Срочко В.А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
2. *Срочко В.А., Ушакова С.Н.* Метод билинеаризации для решения задач оптимизации программных управлений // Известия вузов. Математика. 2005. № 12. С. 63–69.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ПЛАТЫ

Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова

Институт математики и механики УрО РАН, С. Ковалевской 16, 620219 Екатеринбург, Россия
subb@uran.ru, eakolpakova@gmail.com

Введение. Задачи оптимального управления с терминальным функционалом платы являются классическими для теории оптимального управления [1, 2, 3]. В данной работе приводятся результаты исследования устойчивости [4] численного решения этой задачи оптимального управления на основе необходимых условий оптимальности в терминах характеристик [5].

1. Постановка задачи. Рассматривается задача оптимального управления с динамикой

$$\dot{x} = f(x) + g(u),\ u \in U \subset R^m; x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, $x \in R^n$, u – управление, U – компакт, $(t_0, x_0) \in [0, T] \times R^n$.

Функционал платы имеет вид

$$I(t_0, x_0, u(\cdot)) = h(x(T; t_0, x_0, u(\cdot))) \to \inf_{u(\cdot) \in \tilde{U}}, \tag{2}$$