Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\Theta < \infty$, что в ε-окрестности множества $G_\Theta(\tau)$ содержатся все состояния, из которых можно попасть в точку $x_f(\tau+\Theta)$ за конечное время, используя дискретные управления, удовлетворяющие неравенству $|u(t)| \le L,\ t \ge \tau$.

Функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(0|\tau, z),\ z \in G_\Theta(\tau),\ \tau = k\nu,\ k = 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

будем называть оптимальным (стартовым) управлением типа обратной связи.

В качестве обратной связи (4), решающей задачу осуществления движения, была взята функция (9):

$$u(t, x) = u^0(t, x),\ x \in G_\Theta,\ t \ge 0.$$

Описывается алгоритм построения оптимальной обратной связи. Результаты иллюстрируются на примере динамической системы четвертого порядка.

Список литературы

1. *Айзерман М.А.* Лекции по теории автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А.* Решение классической задачи регулирования методами оптимального управления // АиТ. 2001. №6. С.18-29.
3. *Gabasov R., Kirillova F.M., Prischepova S.V.* Optimal Feedback Control. Lectures Notes in Control and Information Sciences (M.Thoma ed.), Springer. Berlin-London. 1995. – V.207.

СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ MIMO-СИСТЕМ

Н.И. Сельвесюк

Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского, Планетная 3, 125190 Москва, Россия
selvesuk@mail.ru

Введение. В докладе представлен новый метод синтеза регуляторов в обратной связи для MIMO-систем с учетом случайных возмущений. Целью синтеза является стабилизация системы и обеспечение заданной точности управления по отдельным параметрам объекта. Требования к точности формулируются через значения дисперсий регулируемых выходов, что является наиболее естественным на практике. Метод основан на результатах нового направления анализа и синтеза линейных MIMO-систем – технологии вложения систем [1].

1. Постановка задачи синтеза. При решении задачи синтеза на основе предлагаемого метода используются линеаризованные относительно невозмущенных траекторий модели объекта вида

$$\dot{x}(t) = A_x x(t) + B_x u(t) + G_x w(t),\ y(t) = C_x x(t),\ z(t) = Dx(t). \tag{1}$$

Здесь $x \in \Re^{n_x}$ – вектор состояния обобщенной модели, включающей формирующие фильтры для возмущений; $u \in \Re^{n_u}$ – вектор внутренних управлений; w – вектор случайных возмущений; $y \in \Re^{n_y}$ – вектор измеряемых выходов объекта; $z \in \Re^{n_z}$ – вектор регулируемых параметров объекта. Полагается, что пара (A_x, B_x) стабилизируема, пара (A_x, G_x) – управляема, пара (C_x, A_x) – наблюдаема.

Случайные возмущения представляют собой стационарные гауссовские случайные процессы с заданными спектральными плотностями $S_w(\omega)$. Учет спектрального состава возмущений осуществляется с помощью формирующих фильтров, включаемых в состав модели объекта (1). На вход фильтров подается белый шум с заданной интенсивностью Q.

Требования к точности управления задаются в виде ограничений на значения дисперсий регулируемых параметров и формализуются через диагональные элементы соответствующей ковариационной матрицы: $\sigma_{z_i}^2 \le \gamma_i,\ i = \overline{1, n_z},\ \gamma_i > 0,\ \sigma_z^2 = \mathrm{diag}(P_z),\ P_z = M\{z(t)z^{\mathrm{T}}(t)\}$.

В обратной связи используются в общем случае динамические регуляторы вида

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_\varepsilon \varepsilon(t) + B_\varepsilon y(t),\ u(t) = C_\varepsilon \varepsilon(t) + D_\varepsilon y(t), n_\varepsilon \le n_x, \tag{2}$$

где $\varepsilon \in \Re^{n_\varepsilon}$ – вектор состояния регулятора.

Модель замкнутой системы (1)–(2) представляется в блочном виде

$$\dot{x}_\Sigma(t) = (A - BKC)x_\Sigma(t) + Gw(t),\ x_\Sigma = [\ x \quad \varepsilon\ ]^{\mathrm{T}},\ K = -\begin{pmatrix} D_\varepsilon & C_\varepsilon \\ B_\varepsilon & A_\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Задача синтеза управления заключается в нахождении структурной матрицы коэффициентов регулятора K, удовлетворяющей дисперсионному уравнению системы

$$(A - BKC)P + P(A - BKC)^{\mathrm{T}} + GQG^{\mathrm{T}} = 0,\ P = P^{\mathrm{T}} > 0, \tag{4}$$

где P – дисперсионная матрица замкнутой системы (3) в установившемся режиме. При этом дисперсионная матрица управляемых выходов определяется выражением $P_z = DPD^{\mathrm{T}}$. Регуляторы, удовлетворяющие уравнению (4), называются регуляторами заданной точности.

2. Решение задачи синтеза. Аналитическое решение в общем виде дается теоремой, доказательство которой приведено в [2].

Теорема 1. *Заданная ковариационная матрица состояния $P > 0$ замкнутой линейной системы (3) при выполнении структурных ограничений $n_x - n_u < n_y + n_\varepsilon$ является достижимой, если и только если выполняются условия*

$$\overline{B}^L P(H + H^{\mathrm{T}})P(\overline{B}^L)^{\mathrm{T}} = 0;\ (\overline{C}^R)^{\mathrm{T}}(H + H^{\mathrm{T}})\overline{C}^R = 0, \tag{5}$$

где матрица H определяется формулой

$$H = P^{-1}(AP + \tfrac{1}{2}GQG^{\mathrm{T}})P^{-1}.$$

При этом все множество структурных матриц K соответствующих регуляторов определяется формулой

$$\{K\}_\eta = \widetilde{B}^L P(H + \eta)\widetilde{C}^R, \tag{6}$$

где η – любая из множества кососимметрических матриц

$$\{\eta\}_\kappa = (\Phi_1 \overline{B}^L P + \Phi_2(\overline{C}^R)^{\mathrm{T}} - I_{n_x+n_\varepsilon})(H\overline{C}^R\Phi_2^{\mathrm{T}} - H^{\mathrm{T}}P(\overline{B}^L)^{\mathrm{T}}\Phi_1^{\mathrm{T}}) + (H\overline{C}^R\Phi_2^{\mathrm{T}} - H^{\mathrm{T}}P(\overline{B}^L)^{\mathrm{T}}\Phi_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} + P^{-1}\overline{B(\overline{C}^R)^{\mathrm{T}}P^{-1}B}^R\kappa(P^{-1}\overline{B(\overline{C}^R)^{\mathrm{T}}P^{-1}B}^R)^{\mathrm{T}},$$

κ – произвольная кососимметрическая матрица подходящего размера.

Здесь $\overline{M}^L$, $\overline{M}^R$, $\widetilde{M}$ означают левый и правый делители нуля и сводный канонизатор матрицы M соответственно [1].

Определение достижимой ковариационной матрицы осуществляется с помощью численных методов [3]. Множество регуляторов (6), эквивалентных по постановке задачи, позволяет удовлетворить дополнительные требования синтеза.

Заключение. Таким образом, предлагаемый метод синтеза позволяет напрямую формулировать требования к точности управления в понятных инженерных терминах – дисперсиях регулируемых параметров. Это принципиально отличает его от существующих оптимизационных методов синтеза MIMO-систем при действии возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента РФ МД-235.2008.8.

Список литературы

1. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. - Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
2. *Сельвесюк Н.И.* Синтез ковариационных регуляторов на основе технологии вложения систем // Автоматика и телемеханика. 2005. № 6. С. 126–137.
3. *Сельвесюк Н.И.* Геометрический подход к решению задачи ковариационного управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 1. С. 1–14.

ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОЦЕНИВАЮЩИХ НИЖНЮЮ ГРАНЬ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Г.В. Сидоренко

Байкальский государственный университет экономики и права, Ленина 11,664000 Иркутск, Россия
dykhta@isea.ru

На основе достаточных условий оптимальности Кротова можно провести оценку снизу точкой нижней грани функционала в задаче оптимального управления

$$\dot{x} = f(t, x, u), t \in [t_0, t_1] = T, x(t) \in R^n, u(t) \in R^r,$$

$$x(t_0) \in X_0, u(t) \in U(t),$$

$$F(x(t_1)) \to \inf .$$

Эта оценка определяется при помощи непрерывно дифференцируемой функции $\varphi : T \times R^n \to R^1$ и функционала $l(\varphi)$:

$$l(\varphi) = m(\varphi) - \int_T \mu(t, \varphi) dt,$$

где

$$m(\varphi) = \inf_{\substack{x_0 \in X_0 \\ x_1 \in X_*(t_1)}} (\varphi(t_1, x_1) - \varphi(t_0, x_0) + F(x_1)),$$

$$\mu(t, \varphi) = \sup_{\substack{u \in U(t) \\ x \in X_*(t)}} (\varphi_x'(t, x) f(t, x, u) + \varphi_t(t, x)).$$

Здесь φ_x, φ_t – соответствующие частные производные, $X_*(t)$ – некоторая априорная внешняя оценка множества достижимости $X_D(t)$ исходной управляемой системы. Эта оценка имеет вид: $l(\varphi) \le \inf F(x(t_1))$ по траекториям управляемой системы. Заметим, что это неравенство справедливо для любых указанных выше функций φ. Но тогда, естественно, встает задача об уточнении оценки нижней грани: $l(\varphi) \to \sup\limits_{\varphi}$.

В работе [1] проводится подробное исследование этой задачи. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности, предложены схемы последовательного уточнения. Однако, вообще говоря, требуется наличие некоторой внешней оценки множества достижимости $X_*(t)$. Если $X_*(t) = R^n$, то для некоторых функций φ функционал $l(\varphi)$ может быть неограничен. Поэтому задача конструктивного определения таких оценок актуальна. Тем более, что это можно сделать, оставаясь в рамках конструкций Кротова.

Пусть $\{F_i(t, x)\}_{i=1}^s$ – набор непрерывно дифференцируемых по своим аргументам функций $F_i : T \times R^n \to R^1$. Тогда каждое из множеств

$$X_i(t, \varphi_i) = \{x \in R_n : F_i(t, x) \ge m_i(t, \varphi_i) + \int_{t_0}^t \mu_i(\tau, \varphi_i) d\tau\},$$