Приведен иллюстративный пример, соответствующий простейшей модели динамики рыночных цен [6]. Кроме того, обсуждаются возможности расширения класса систем, для которых применима используемая методика.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00359) и Программы поддержки ведущих научных школ России.

### Список литературы

1. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
2. *Максимов В.И.* Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
4. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.
5. *Розенберг В.Л.* Задача динамического восстановления неизвестной функции в линейном стохастическом дифференциальном уравнении // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 76–87.
6. *Litzenberger R.H., Rabinowitz N.* Backwardation in oil future markets: theory and empirical evidence // J. of Finance. 1995. Vol. L, No. 5. P. 166–184.

# СИНТЕЗ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В ЗАДАЧЕ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ЗАДАННЫХ ДВИЖЕНИЙ

**Е.А. Ружицкая**

Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины, Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
{ruzhitskaya}@gsu.by

**Введение.** Исследуется задача осуществления заданных движений динамическими системами. Методами оптимального управления строится алгоритм работы регулятора, который в режиме реального времени вычисляет текущие значения ограниченных обратных связей, с помощью которых замкнутая система устойчиво осуществляет заданное движение. Результаты иллюстрируются на задаче слежения.

**1. Постановка задачи.** Пусть на промежутке времени $t \geq 0$ динамическая система с управлением описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — $n$-вектор состояния системы в момент $t$, $u = u(t)$ — значение скалярного управляющего воздействия, $rank(b, Ab, ..., A^{n-1}b) = n$.

Будем считать, что доступные управления ограничены: $|u(t)| \leq L,\ t \geq 0$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим движение на фазовой плоскости

$$x = x_f(t),\ t \geq 0, \tag{2}$$

заданное кусочно-гладкой функцией $x_f(t),\ t \geq 0$.

Будем говорить, что движение (2) допустимо (осуществимо), если существует такое доступное управление $u_f(t),\ |u_f(t)| \leq L,\ t \geq 0$, что

$$\dot{x}_f(t) = Ax_f(t) + bu_f(t),\ t \geq 0. \tag{3}$$

Пусть $G \subset R^n$ — область фазового пространства системы (1), внутренность которой содержит движение (2): $x_f(t) \in intG,\ t \geq 0$.

**Определение 1.** *Функция*

$$u = u(t, x),\ x \in G,\ t \geq 0, \tag{4}$$

*называется ограниченной обратной связью, осуществляющей движение (2), если 1)* $u(t, x_f(t)) = u_f(t),\ t \geq 0$; *2)* $|u(t, x)| \leq L,\ x \in G,\ t \geq 0$; *3) замкнутая система*

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x),\ x(0) \in G, \tag{5}$$

*имеет решение* $x(t),\ t \geq 0$*; 4) решение* $x = x_f(t),\ t \geq 0$, *системы (5) асимптотически устойчиво.*

Синтез обратных связей (4), обладающих перечисленными свойствами, и есть основная задача теории следящих систем. Следуя концепции Ляпунова из классической теории устойчивости о невозмущенном – возмущенном движениях, приведем другую (эквивалентную) постановку задачи осуществления движений.

Опираясь на уравнение (1) (невозмущенного движения) и заданное движение, введем новые переменные $y(t) = x(t) - x_f(t),\ v(t) = u(t) - u_f(t),\ t \geq 0$. Их поведение подчиняется уравнению (возмущенного движения)

$$\dot{y} = Ay + bv, \tag{6}$$

и неравенствам $-L - u_f(t) \leq v(t) \leq L - u_f(t),\ t \geq 0$.

В результате, задача устойчивого осуществления движения (2) системой (1) с постоянным ограничением на управление свелась к задаче стабилизации тривиального решения $y(t) = 0,\ t \geq 0$, системы (6) управлениями с переменными (во времени) ограничениями.

Обратную связь (2), $t = 0, \nu, 2\nu, \ldots$, назовем дискретной (с периодом квантования $\nu > 0$), если порождаемая им траектория замкнутой системы (5) с начальным условием $x(0) = x_0$ строится по следующему правилу

$$\dot{x} = Ax + bu(t),\ x(0) = x_0, u(t) = u(k\nu, x(k\nu)),\ t \in [k\nu, (k+1)\nu[,\ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Для построения обратных связей вводится вспомогательная (сопровождающая) задача оптимального управления.

**2. Сопровождающая задача оптимального управления** Функцию $u(t),\ t \in T = [0, \Theta],\ \Theta = N\nu$, назовем дискретным управлением с периодом квантования $\nu > 0$, если $u(t) = u((k-1)\nu),\ t \in [(k-1)\nu, k\nu[,\ k = 1, ..., N$.

Пусть $\tau = k\nu$ — произвольный момент времени. В классе дискретных управлений рассмотрим задачу оптимального управления

$$B_\Theta(\tau, z) = \min \int_\tau^{\tau+\Theta} |u(t) - u_f(t)| dt, \tag{8}$$

$$\dot{x} = Ax + bu,\ x(\tau) = z,\ x(\tau + \Theta) = x_s(\tau + \Theta),\ \tau \geq 0,$$

$$|u(t)| \leq L,\ t \in T = [\tau, \tau + \Theta],$$

где $x_s(\tau + \Theta)$ — прогнозируемое положение задающего движения, построенное по реализовавшимся значениям задающего движения в моменты $\tau - 2\nu,\ \tau - \nu,\ \tau$, $\tau$ – текущий момент времени.

Обозначим: $u^0(t|\tau, z),\ t \in T,$ — оптимальное программное управление задачи (8) для позиции $(\tau, z)$, $G_\Theta(\tau)$ — множество векторов $z \in R^n$, для которых задача (8) с фиксированным $\tau$ имеет решение.

Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\Theta < \infty$, что в $\varepsilon$-окрестности множества $G_\Theta(\tau)$ содержатся все состояния, из которых можно попасть в точку $x_f(\tau+\Theta)$ за конечное время, используя дискретные управления, удовлетворяющие неравенству $|u(t)| \leq L,\ t \geq \tau$.

Функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(0|\tau, z),\ z \in G_\Theta(\tau),\ \tau = k\nu,\ k = 0, 1, 2, \ldots \quad (9)$$

будем называть оптимальным (стартовым) управлением типа обратной связи.

В качестве обратной связи (4), решающей задачу осуществления движения, была взята функция (9):

$$u(t, x) = u^0(t, x),\ x \in G_\Theta,\ t \geq 0.$$

Описывается алгоритм построения оптимальной обратной связи. Результаты иллюстрируются на примере динамической системы четвертого порядка.

**Список литературы**


1. *Айзерман М.А.* Лекции по теории автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А.* Решение классической задачи регулирования методами оптимального управления // АиТ. 2001. №6. С.18-29.
3. *Gabasov R., Kirillova F.M., Prischepova S.V.* Optimal Feedback Control. Lectures Notes in Control and Information Sciences (M.Thoma ed.), Springer. Berlin-London. 1995. – V.207.


# СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ MIMO-СИСТЕМ


**Н.И. Сельвесюк**

Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского, Планетная 3, 125190 Москва, Россия
selvesuk@mail.ru


**Введение.** В докладе представлен новый метод синтеза регуляторов в обратной связи для MIMO-систем с учетом случайных возмущений. Целью синтеза является стабилизация системы и обеспечение заданной точности управления по отдельным параметрам объекта. Требования к точности формулируются через значения дисперсий регулируемых выходов, что является наиболее естественным на практике. Метод основан на результатах нового направления анализа и синтеза линейных MIMO-систем – технологии вложения систем [1].

**1. Постановка задачи синтеза.** При решении задачи синтеза на основе предлагаемого метода используются линеаризованные относительно невозмущенных траекторий модели объекта вида

$$\dot{x}(t) = A_x x(t) + B_x u(t) + G_x w(t),\ y(t) = C_x x(t),\ z(t) = Dx(t). \quad (1)$$

Здесь $x \in \Re^{n_x}$ – вектор состояния обобщенной модели, включающей формирующие фильтры для возмущений; $u \in \Re^{n_u}$ – вектор внутренних управлений; $w$ – вектор случайных возмущений; $y \in \Re^{n_y}$ – вектор измеряемых выходов объекта; $z \in \Re^{n_z}$ – вектор регулируемых параметров объекта. Полагается, что пара $(A_x, B_x)$ стабилизируема, пара $(A_x, G_x)$ – управляема, пара $(C_x, A_x)$ – наблюдаема.

Случайные возмущения представляют собой стационарные гауссовские случайные процессы с заданными спектральными плотностями $S_w(\omega)$. Учет спектрального состава возмущений осуществляется с помощью формирующих фильтров, включаемых в состав модели объекта (1). На вход фильтров подается белый шум с заданной интенсивностью $Q$.

Требования к точности управления задаются в виде ограничений на значения дисперсий регулируемых параметров и формализуются через диагональные элементы соответствующей ковариационной матрицы: $\sigma^2_{z_i} \leq \gamma_i,\ i = \overline{1, n_z},\ \gamma_i > 0,\ \sigma^2_z = \mathrm{diag}(P_z),\ P_z = M\{z(t)z^{\mathrm{T}}(t)\}$.