$\bar{\bar{n}}(t) = (\bar{n}(t), \bar{n}(t+\Delta t), ..., \bar{n}\,(T_{max}))$, определяющее эволюцию сети. Если $T_{max} < \infty$, то говорим о конечном горизонте управления, в противном случае – о бесконечном.

Пусть $E = E\,(\bar{\bar{n}})$ – эффективность функционирования сети на заданном интервале управления, тогда управление $\bar{\bar{n}}^*$, максимизирующее эффективность, называется оптимальным. Задача оптимального управления для НМ-сети состоит в поиске оптимального управления:

$$E\,(\bar{\bar{n}}^*) = \max_{\bar{\bar{n}}} E\,(\bar{\bar{n}})\,. \qquad (1)$$

В качестве $E\,(\bar{\bar{n}})$ мы предлагаем взять общий суммарный ожидаемый доход НМ-сети, который можно найти, используя ожидаемые доходы систем сети, удовлетворяющие полученным в [1] системам разностно-дифференциальных уравнений. В докладе рассматриваются различные методы решения задачи (1).

Список литературы

1. *Маталыцкий М.А., Колузаева Е.В.* Марковские сети массовго обслуживания произвольной топологии с доходами // Докл. НАН РБ. 2009. Т. 53. № 1. (в печати).

ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ НАЧАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.В. Метельский

Белорусский национальный технический университет, пр. Независимости 65, 220013 Минск, Беларусь
ametelski@bntu.by

Пусть исследуемая система (назовем ее Σ) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Dx(t) + D_1x(t-h) + D_2\dot{x}(t-h) + bu(t), t > 0, \qquad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in H^- = [-h; 0]. \qquad (2)$$

Здесь $x = \mathrm{col}(x_1; x_2)$ — 2-вектор-столбец фазовых переменных абсолютно непрерывного решения уравнения (1); $0 < h$ — постоянное запаздывание; $D = (d_{ij}), D_1 = (d^1_{ij}), D_2 = (d^2_{ij})$ $(i, j = \overline{1,2})$ — постоянные 2×2 -матрицы; b — постоянный 2-вектор-столбец; допустимое управление $u(t), t \in T = [0; t_1]$, — суммируемая с квадратом функция, где $0 < t_1$ — достаточно большой фиксированный момент времени (можно взять $t_1 \geq 2h$). Начальные функции φ считаем абсолютно непрерывными: $\varphi \in D^2$, где $D^2 = D^2[-h; 0]$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций с нормой $\|\varphi\|_{D^2} = |\varphi(-h)| + \int\limits_{-h}^{0} |\dot{\varphi}(s)|ds$, где $|\cdot|$ — норма в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Обозначим

$$W(\lambda) = \lambda E - D - D_1\mu - D_2\lambda\mu,\ \mu = e^{-\lambda h},$$

характеристическую матрицу уравнения (1). Здесь E — единичная матрица, $\lambda \in \mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Критерий полной управляемости системы Σ нейтрального типа второго порядка выражает [1] следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы система Σ была полностью управляема необходимо и достаточно, чтобы одновременно:*

1) $\mathrm{rank}\,[W(\lambda), b] = 2\ \ \forall\lambda \in \mathbb{C};$ (3)

2) $\mathrm{rank}\,[b, D_2] = \mathrm{rank}\,[b, D_2b].$ (4)

Считаем, что система управления Σ имеет полный ранг, то есть справедливо условие (3), а условие (4) теоремы 1 не выполняется. Тогда возникает задача описания класса $\mathcal{M}$ управляемых начальных состояний (2).

Система Σ заменой переменных приводится к виду

$$\dot{x}_1(t) = u(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = d_{21}x_1(t) + d_{22}x_2(t) + d_{21}^1 x_1(t-h) + d_{22}^1 x_2(t-h) + d_{22}^2 \dot{x}_2(t-h), t > 0.$$

Для простоты здесь сохранены исходные обозначения. Доказана

Теорема 2. *Для системы Σ в случаях 1) $d_{21}^1 \neq 0$, $d_{21}^1 + d_{21}d_{22}^2 \neq 0$, $t_1 \geq 2h$, 2) $d_{21}^1 = 0$, $t_1 \geq h$, управляемы непрерывно дифференцируемые начальные состояния (2), удовлетворяющие граничному условию*

$$\dot{\varphi}_2(0) - d_{21}\varphi_1(0) - d_{22}\varphi_2(0) - d_{21}^1\varphi_1(-h) - d_{22}^1\varphi_2(-h) - d_{22}^2\dot{\varphi}_2(-h) = 0. \tag{5}$$

В случае 3) $d_{21}^1 \neq 0$, $d_{21}^1 + d_{21}d_{22}^2 = 0$, $t_1 \geq h$, управляемы дважды непрерывно дифференцируемые с абсолютно непрерывной второй производной начальные состояния (2), удовлетворяющие наряду с (5) дополнительному граничному условию

$$\ddot{\varphi}_2(0) - d_{21}\dot{\varphi}_1(0) - d_{22}\dot{\varphi}_2(0) - d_{21}^1\dot{\varphi}_1(-h) - d_{22}^1\dot{\varphi}_2(-h) - d_{22}^2\ddot{\varphi}_2(-h) = 0.$$

Вывод. В случаях 1)-3) множество $\mathcal{M}$ управляемых начальных состояний (2) составляет класс функций $\varphi(\cdot)$, всюду плотный в D^2.

Покажем, что класс управляемых начальных состояний для системы нейтрального типа может задаваться граничным условием и тогда, когда спектральное условие (3) нарушается, однако, такой класс $\mathcal{M}$, вообще говоря, не является всюду плотным в D^2.

Пример. Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \;\; \dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t-h), t > 0. \tag{6}$$

Здесь спектральное условие (3) не выполняется: $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ -\lambda\mu & \lambda & 0 \end{bmatrix} < 2$, если $\lambda = 0$, а дополнительное условие (4): $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ выполняется. Найдем класс управляемых начальных состояний (2).

1) $t \in [0; h]$. Интегрируя систему (6), получаем

$x_1(t) = \varphi_1(0) + \int\limits_0^t u(\tau)d\tau, \;\; x_2(t) = \varphi_2(0) + \varphi_1(t-h) - \varphi_1(-h).$

2) $t \in [h; 2h]$. Тогда

$x_1(t) = x_1(h) + \int\limits_h^t u(\tau)d\tau = \varphi_1(0) + \int\limits_0^t u(\tau)d\tau,$

$x_2(t) = x_2(h) + \int\limits_h^t u(\tau - h)d\tau = \varphi_2(0) + \varphi_1(0) - \varphi_1(-h) + \int\limits_h^t u(\tau-h)d\tau.$

Для того, чтобы $x_2(t) \equiv 0, t \geq 2h$, при $u(t) \equiv 0, t \geq h$, необходимо и достаточно

$$\varphi_2(0) + \varphi_1(0) - \varphi_1(-h) + \int_h^{2h} u(\tau - h)d\tau = 0. \tag{7}$$

Ввиду $u(t) \equiv 0, t \geq h$, $x_1(t) = x_1(h) = \varphi_1(0) + \int\limits_0^h u(\tau)d\tau, t \geq h$. Поэтому $x_1(t) \equiv 0, t \geq h$, тогда и только тогда, когда

$$\varphi_1(0) + \int_0^h u(\tau)d\tau = 0. \tag{8}$$

Сравнивая условия (7), (8), получаем, что для системы (6) управляемы те и только те начальные состояния (2), которые удовлетворяют граничному условию

$$\varphi_2(0) - \varphi_1(-h) = 0. \tag{9}$$

Используя тождество $\varphi_2(0) = \varphi_2(-h) + \int\limits_{-h}^{0} \dot{\varphi}_2(s)ds$ перепишем условие (9) так

$$\varphi_2(-h) - \varphi_1(-h) + \int_{-h}^{0} \dot{\varphi}_2(s)ds = 0. \tag{10}$$

Очевидно, что функции $\varphi(\cdot)$, удовлетворяющие условию (10), не образуют всюду плотное множество в D^2.

Список литературы

1. *Карпук В.В., Метельский А.В., Минюк С.А.* Задачи идентифицируемости и управляемости для линейных автономных систем нейтрального типа второго порядка . // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 4. С. 455–464.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

А.И. Мехталиев

Академия Государственного Управления при Президенте Азербайджанской Республики
aga_mehdi@mail.ru

В последнее время в научной литературе, а также в Интернете все чаще встречаются различные применения “Метода анализа иерархий” (МАИ) Американского математика Томаса Саати (*Saaty Thomas L.*) [1]. Интересно, что среди различных применений этого метода можно сталкиваться с самыми разнообразными задачами. Т. Саати сам применил этот метод при решений различных задач в разных странах: при планировании транспортной системы в Судане; в пивоваренной промышленности Мексики; в области ядерной энергетики (Канада); в области авиапромышленности (Израиль); для прогнозирования развития высшего образования в США и т. д. В чем же причина такого успешного применения “Метода анализа иерархий”?. Автор доклада, анализировав все ему известные статьи и исследования по этому методу, пришел к следующим выводам.

1. Суть измерения физических величин заключается в сравнении этих величин друг с другом. А сравнение двух величин в свою очередь должно отвечать на следующий вопрос: сколько раз одна из них может разместиться в другой. Например, в геометрии. Пусть заданы два отрезка прямых. Берем из них короткий и, поместив его на втором отрезке несколько раз, можем определить сколько раз второй отрезок длиннее первого. В этом случае размер короткого отрезка фактически вступает в роли единицы измерения длины. Если в качестве единицы измерения длины взять миллиметр, сантиметр, и т. д., то измерение этих отрезок прямых и есть сравнение этих отрезок с единицами измерения длины. Как известно, для измерения физических величин существуют различные шкалы измерения. В качестве примера можно указать шкалы измерения длины, веса, времени, денег, температуры и т. д. Для измерения различных физических величин изобретены специальные приборы измерения и с помощью этих приборов их размеры определяются с определенной точностью. А как сравнить друг с другом факторы социального, политического, эмоционального и т. д. характера, физическое измерение которых вообще невозможно. Допустим, что не существуют