$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad t \in T_1, \quad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

$$\dot{y} = g(t,y,v), \quad t \in T_2,$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)). \tag{4}$$

Здесь $(x(t), y(t))$ $(n_1 + n_2)$ - мерный вектор фазовых переменных, A конечное множество m-мерных векторов a, t_i, $i = \overline{1,3}$ $(t_0 < t_1 < t_2)$ - заданы, U (V) - заданное непустое и ограниченное множество, $(u(t), v(t))$ кусочно-непрерывный вектор управляющих воздействий, $G(x)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая n_2-мерная вектор-функция, $f(t,x,u)$ $(g(t,y,v))$ заданная n_1 (n_2)-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x (y) до второго порядка включительно.

Модифицируя метод приращений сначала получено необходимое условие оптимальности в типа максимина и линеаризованного максимина [2, 3], затем исследован особый в смысле максимина [2, 4] случай.

Получены необходимые условия оптимальности особых управлений.

Список литературы

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М. Наука, 1973, 256 с.
2. *Альсевич В.В.* Необходимые условия оптимальности для минимаксных задач оптимизации // Дифференц. уравнения. 1976. № 8.
3. *Демьянов В.Ф. и др.* Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л. Изд.-во ЛГУ, 1982.
4. *Мансимов К.Б.* Особые управления в системах с запаздыванием. Баку, ЕЛМ. 1999, 176 с.

О ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В.М. Марченко, А.А. Якименко

Белорусский государственный технологический университет, Свердлова 13а, 220030 Минск, Беларусь
{vmar,yakim}@bstu.unibel.by

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^{N} D_j \dot{x}(t-jh) = \sum_{j=0}^{N} (A_j x(t-jh) + B_j u(t-jh)), \quad t > 0 \tag{1}$$

$(D_j \in \mathbb{R}^{n\times n}; A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}; B_j \in \mathbb{R}^{n\times r}, j = 0,1,\ldots,N; N \in \mathbb{N}, h > 0)$
или в операторной форме

$$(I_n - D(e^{-ph}))\dot{x}(t) = A(e^{-ph})x(t) + B(e^{-ph})u(t), \quad t > 0$$

где e^{-ph}– оператор сдвига ($e^{-ph}x(t) \equiv x(t-h)$); $D(e^{-ph}) \in \mathbb{R}^{n\times n}[e^{-ph}]$, $A(e^{-ph} \in \mathbb{R}^{n\times n}[e^{-ph}]$, $B(e^{-ph}) \in \mathbb{R}^{n\times r}[e^{-ph}]$; элементы $s \times q$ -матрицы-функции из $\mathbb{R}^{s\times q}[m]$ есть многочлены переменной $m = e^{-ph}$ степени не выше N , $D(0) = 0$.

Присоединим к системе (1) линейный разностный регулятор со многими запаздываниями по состоянию и управлению:

$$\sum_{j=0}^{\Theta} \varphi_j u(t-jh) = \sum_{j=0}^{\Theta} Q_j x(t-jh) \tag{2}$$

$$(\varphi_j \in \mathbb{R},\ Q_j \in \mathbb{R}^{r\times n},\ j = 0, 1, \dots, \Theta;\ u(t) \equiv 0, x(t) \equiv 0, t < -Nh)$$

или в операторной форме

$$\varphi(e^{-ph})u(t) = Q(e^{-ph})x(t),$$

где $\varphi(m) = \sum\limits_{j=0}^{\Theta} \varphi_j m^j \in \mathbb{R}[m],\ Q(m) \in \mathbb{R}^{r\times n}[m],\ m = e^{-ph}$.

Определение 1. *Квазиполином* $\varphi(e^{-\lambda h}) = \sum\limits_{j=0}^{M} \varphi_j e^{-\lambda jh}$, $\varphi_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, M,\ \ \lambda \in \mathbb{C}$, *назовем экспоненциально устойчивым, если действительные части всех его корней* $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,\ 2,\ \dots$, *меньше некоторого действительного отрицательного числа (здесь* $\mathbb{C}$ *– поле комплексных чисел).*

Определение 2. *Будем говорить, что система (1), (2) экспоненциально стабилизируема, если найдется регулятор вида (2) (т.е. найдутся коэффициенты* $\varphi_j \in \mathbb{R}, Q_j \in \mathbb{R}^{r\times n}, j = 0, 1, \dots, \Theta$*) с экспоненциально устойчивым квазиполиномом* $\varphi(e^{-ph})$ *такой, что система*

$$\frac{d}{dt}(\varphi(e^{-ph})(I_n - D(e^{-ph}))x(t)) = \varphi(e^{-ph})A(e^{-ph})x(t) + B(e^{-ph})Q(e^{-ph})u(t), \quad t > 0,$$

будет экспоненциально устойчива.

Представим систему (1) в виде

$$(I_n - D(e^{-ph}))\dot{x}(t) = A(e^{-ph})x(t) + B(e^{-ph})u(t), \quad t > 0 \tag{3}$$

Введем обозначение $\psi(m) = \det[I_n - D(m)],\ m \in \mathbb{C}$.

Умножим слева обе части системы (3) на матрицу $\Pi(e^{-ph})$ – матрицу алгебраических дополнений матрицы $I_n - D(e^{-ph})$.

Тогда систему (3) перепишем в виде

$$\psi(e^{-ph})\dot{x}(t) = \tilde{A}(e^{-ph})x(t) + \tilde{B}(e^{-ph})u(t),$$

где $\tilde{A}(m) = \Pi(m)A(m)$, $\tilde{B}(m) = \Pi(m)B(m)$; $\psi(\cdot) \not\equiv 0$, так как $\psi(0) = \det[I_n - D(0)] = \det[I_n] = 1,\ m \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим систему векторов

$$\tilde{B}_1(m),\ \tilde{A}(m)\tilde{B}_1(m), \dots, \tilde{A}^{k_1-1}(m)\tilde{B}_1(m),$$

где k_1 – наибольшее натуральное число такое, что эти векторы линейно независимы хотя бы при одном значении m , $\tilde{B}_1(m)$ – первый столбец матрицы $\tilde{B}(m)$.

Если $k_1 < n$, то рассмотрим систему векторов

$$\tilde{B}_1(m), \tilde{A}(m)\tilde{B}_1(m), \dots, \tilde{A}^{k_1-1}(m)\tilde{B}_1(m), \tilde{B}_2(m), \tilde{A}(m)\tilde{B}_2(m), \dots, \tilde{A}^{k_2-1}(m)\tilde{B}_2(m),$$

где k_2 – наименьшее натуральное число, при котором последняя система векторов линейно независима хотя бы при одном m .

Продолжая этот процесс, получим систему линейно независимых при некотором m векторов

$$K(m) = [\tilde{B}_1(m), \dots, \tilde{A}^{k_1-1}(m)\tilde{B}_1(m), \dots, \tilde{B}_\eta(m), \dots, \tilde{A}^{k_\eta-1}(m)\tilde{B}_\eta(m)],$$

$k_1 + k_2 + \cdots k_\eta = n$.

Теорема 1. *Для экпоненциальной стабилизируемости системы (1) регулятором (2) достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\det(I_n - D(e^{-ph})) = 0, \quad \det K(m) \equiv \phi(m) = 0, \ m \in \mathbb{C},$$

лежали вне круга $|m| \leq 1$.

Замечание. Условия теоремы 1 достаточно легко проверяемы, поскольку требуют проверки корней не квазиполиномов, а полиномов. В процессе доказательства теоремы получен регулятор вида (2), экспоненциально стабилизирующий систему (1). Коэффициенты искомого регулятора получаются из решения системы линейных алгебраических уравнений над полем частных кольца квазиполиномов.

Работа выполнена в рамках научного сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАРКОВСКОЙ НМ-СЕТИ

М.А. Маталыцкий, О.М. Сытая

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
m.matalytski@gmail.com, sytaya_om@mail.ru

Рассматривается замкнутая марковская НМ-сеть – марковская сеть массового обслуживания с доходами, в которой обслуживается постоянное число заявок K. Под состоянием сети в момент времени t будем понимать вектор

$$k(t) = (k, t) = (k_1, k_2, ..., k_n, t),$$

где k_i – число заявок в системе S_i в момент времени t, $i = \overline{1, n}$. Число состояний сети равно $N = C_{n+K-1}^{n-1}$. Матрицу вероятностей переходов между состояниями сети обозначим через $Q = \|q_{ij}\|_{N \times N}$. Можно установить связь между этой матрицей и матрицей вероятностей переходов заявок между системами сети $P = \|p_{ij}\|_{n \times n}$, где p_{ij} – вероятность перехода заявки из системы S_i в систему S_j. Заявка при переходе из одной системы в другую приносит последней системе некоторый доход, который может являться случайной величиной с заданными моментами первых двух порядков; доход первой системы уменьшается соответственно на эту величину.

Будем называть НМ-сеть управляемой, если в каждый момент времени t и в каждом состоянии $l = 1, 2, ..., N$ может быть выбрана строка матрицы Q

$$q_l^{(n_l)} = \left(q_{l_1}^{(n_l)}, q_{l_2}^{(n_l)}, ..., q_{l_N}^{(n_l)}\right)$$

и строка матрицы одношаговых доходов R

$$r_l^{(n_l)} = \left(r_{l_1}^{(n_l)}, r_{l_2}^{(n_l)}, ..., r_{l_N}^{(n_l)}\right),$$

определяющих дальнейшее функционирование сети.

Величина n_l называется стратегией управления в l-ом состоянии, а $N_l = \{n_l\}$ – множеством стратегий управления в l-ом состоянии. Вектор стратегий $\bar{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, ..., \bar{n}_N) \in N_i \times N_2 \times ... \times N_N$ назовем политикой. Если стратегия n_l или политика $\bar{n}$ выбираются в момент времени t, то пишем $n_l(t)$ или $\bar{n}(t) = (\bar{n}_1(t), \bar{n}_2(t), ..., \bar{n}_N(t))$. Последовательность выбранных в различные моменты моменты времени политик образуют управление