где $x \in R^n$; A_0, A, B, B_i ($i = \overline{1,m}$ – постоянные матрицы соответствующих размеров, причем $\det A_0 = 0$; x_0 – заданный n-вектор; $\varphi_i(t)$, $1 \le i \le m$ – заданная кусочно-непрерывная на промежутках $[-h_i, 0) - n$-вектор-функция; u r-мерное достаточно гладкое управление.

Начальное состояние (2) для системы (1) назовем допустимым, если система (1) при этом состоянии имеет хотя бы одно решение. Если для каждого допустимого начального состояния (2) система (1) имеет единственное решение, то такую систему будем называть совместной.

Систему (1) назовем регулярной, если регулярен пучок матриц $(\lambda A_0 - A)$, т. е. найдется $\lambda_0 \in C$ такое, что $\det(\lambda_0 A_0 - A) \ne 0$.

Итак, пусть система (1) является регулярной. Введем в рассмотрение матрицы

$$\hat{A}_0 = (\lambda_0 A_0 - A)^{-1} A_0,\ \hat{A} = (\lambda_0 A_0 - A)^{-1} A,$$
$$\hat{B} = (\lambda_0 A_0 - A)^{-1} B + \sum_{i=1}^{m} e^{-\hat{A}_0^d \hat{A} h_i} (\lambda_0 A_0 - A)^{-1} B_i,$$

где $\hat{A}_0^d$ – обратная Дразина матрицы $\hat{A}_0$.

Тогда, согласно [1], [2] система (1) совместна и ее общее решение представимо в виде

$$x(t) = e^{\hat{A}_0^d \hat{A} t} \hat{A}_0 \hat{A}_0^d q + \int_0^t e^{\hat{A}_0^d \hat{A}(t-\tau)} \hat{A}_0^d \hat{B} u(\tau) d\tau \tag{3}$$
$$+(E_n - \hat{A}_0 \hat{A}_0^d) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (\hat{A}_0 \hat{A}_0^d)^i \hat{A}^d \hat{B} u^{(i)}(t) dt + \sum_{i=1}^{m} \big(\int_{t-h_i}^{t} e^{\hat{A}_0^d \hat{A}(t-\tau)} \hat{A}_0 \hat{A}_0^d Q_i u(\tau) d\tau \big),$$

где $\hat{A}^d$ – обратная Дразина матрицы $\hat{A}$; k – число-индекс матрицы A_0; q – произвольный n-вектор, а $n \times r$-матрица Q_i удовлетворяет уравнению

$$\hat{A}_0^2 \hat{A}_0^d Q_i = -e^{-\hat{A}_0^d \hat{A} h_i} (\lambda_0 A_0 - A)^{-1} B_i,\ 1 \le i \le m.$$

Исходя из представления (3) решения системы (1) ясно, что вектор x_0 и функции $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,m}$ начального состояния (2) допустимы, если они удовлетворяют равенству $x_0 - \sum_{i=1}^{m} \big(\int_{-h_i}^{0} e^{-\hat{A}_0^d \hat{A} s} \hat{A}_0 \hat{A}_0^d Q_i \varphi_i(s) ds \big) = \hat{A}_0 \hat{A}_0^d q + (E_n - \hat{A}_0 \hat{A}_0^d) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (\hat{A}_0 \hat{A}_0^d)^i \hat{A}^d \hat{B} u^i(0).$

Список литературы

1. *Campbell S.L., Meyer C.D.* Generalized inverses of linear transformations. Pitman. 1979.
2. *Крахотко В.В., Размыслович Г.П.* Полная управляемость на подпространство линейных систем с запаздыванием по управлению. // Вестник БГУ, сер.1. №3. 2006. с.130–132.

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

С.С. Кумков

Институт математики и механики УрО РАН,

ул.С.Ковалевской, 16, ГСП-384, 620219 Екатеринбург, Россия

2445@mail.ur.ru

Сингулярными поверхностями в дифференциальных играх называют поверхности в пространстве игры, на которых оптимальные движения системы имеют особенности (изломы, слияния, расщепления). Исследование таких поверхностей является важным, поскольку они дают некий «скелет» строения игры. Основная идея классификации сингулярных поверхностей предложена Р.Айзексом в его книге [1].

Однако до последнего времени отсутствовали общие алгоритмы численного построения сингулярных поверхностей.

Рассматриваются антагонистические дифференциальные игры [2]

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v,\\
&t \in [t_0, T],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in P \subset \mathbb{R}^p,\ v \in Q \subset \mathbb{R}^q,\\
&\varphi\big(x_i(T), x_j(T)\big) \to \min_u \max_v .
\end{aligned} \tag{1}$$

с линейной динамикой и фиксированным моментом окончания T. Управления u первого (минимизирующего) игрока и v второго (максимизирующего) стеснены выпуклыми компактными ограничениями P и Q в своих пространствах. Терминальная функция платы φ зависит лишь от двух компонент фазового вектора в момент окончания. Функция φ считается квазивыпуклой, то есть, имеющей выпуклые множества уровня.

Ранее были разработаны [3] алгоритмы и программы построения сингулярных поверхностей в играх типа (1). При этом предполагалось, что управления игроков являются скалярными, ограниченными по модулю. Цель настоящего доклада — рассказать об алгоритмах, созданных для случая произвольных компактных строго выпуклых ограничений P и Q на управления игроков.

В основе построения сингулярных поверхностей лежат процедуры [4] конструирования максимальных стабильных мостов (множеств уровня функции цены игры). Построения ведутся в трехмерном пространстве *время* $\times$ *эквивалентные координаты*. Переход к двумерной эквивалентной переменной ξ осуществляется по формуле $\xi(t) = X_{i,j}(T,t)x(t)$, где $X_{i,j}(T,t)$ — матрица, составленная из i-й и j-й строк фундаментальной матрицы Коши $X(T,t)$ системы $\dot{x} = A(t)x$. В результате такого перехода получаем дифференциальную игру вида

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi} = D(t)u + E(t)v,\\
&t \in [t_0, T],\ \xi \in \mathbb{R}^2,\ u \in P \subset \mathbb{R}^p,\ v \in Q \subset \mathbb{R}^q,\\
&\varphi\big(\xi_1(T), \xi_2(T)\big) \to \min_u \max_v .\\
&D(t) = X_{i,j}(T,t)B(t), \quad E(t) = X_{i,j}(T,t)C(t).
\end{aligned}$$

Для каждого значения c функции платы φ конструируется ее множество уровня M_c. Затем на выбранной сетке $\{t_i\}$ моментов времени строится набор выпуклых многоугольников $\mathbf{W}_c(t_i)$, приближающих сечения $W_c(t_i)$ максимального стабильного моста W_c, обрывающегося в момент окончания T на множестве M_c.

Алгоритм построения сингулярных поверхностей встраивается в процедуру построения очередного сечения стабильного моста. При построении очередного многоугольника $\mathbf{W}_c(t_i)$ на его границе отыскиваются точки, которым после анализа приписывается тот или иной тип сингулярности. Точки, построенные на последовательных сечениях, соединяются в сингулярные линии, лежащие на границе максимального стабильного моста. Линии, снятые с системы максимальных стабильных мостов, объединяются в сингулярные поверхности (поверхности переключения, рассеивающие, универсальные и экивокальные поверхности).

Задача воздушного перехвата, исследуемая во многих работах J.Shinar (см., например, [5, 6]), использовалась в качестве одного из тестовых примеров, на которых отлаживались алгоритмы. В докладе будут приведены результаты численных построений сингулярных линий и поверхностей в этой задаче при различных вариантах ее параметров. Получено хорошее совпадение с результатами аналитических построений из работы [6].

Рассмотрены также задачи, относящиеся к классу игр «обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина». Подобраны примеры, в которых множества уровня функции цены имеют «узкие шейки» [7]. Именно в таких случаях возникают нетривиальные для численных построений сингулярные линии и поверхности.

Список литературы

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Kumkov S.S., Patsko V.S.* Construction of singular surfaces in linear differential games // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6, E.Altman, O.Pourtallier eds. Birkhäuser, Boston, 2001. P. 185–202.
4. *Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.* Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр, под ред. А.И.Субботина и В.С.Пацко, Свердловск: Институт математики и механики, 1984. С. 127–158.
5. *Shinar J., Medinah M., Biton M.* Singular surfaces in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms // Journal of Optimization Theory and Applications. 1984. Vol. 43. № 3. P. 431–458.
6. *Shinar J., Zarkh M.* Pursuit of a faster evader — a linear game with elliptical vectograms // Proceedings of the Seventh International Symposium on Dynamic Games, Yokosuka, Japan, 1996. P. 855–868.
7. *Кумков С.С., Пацко В.С.* Максимальные стабильные мосты в контрольном примере Л.С.Понтрягина // Вестник Удмуртского университета, серия «Математика, механика», Ижевск. 2000. № 1. С. 92–103.

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В.М. Кунцевич

Институт космических исследований НАН Украины и НКА Украины, проспект Академика Глушкова, 40, корпус 4/1, 03680, МСП, Киев 187 Украина

gvf@ikd.kiev.ua

В докладе рассматриваются две взаимосвязанные задачи: определение достаточных условий робастной устойчивости в заданной области $\mathbf{X}$ семейства систем

$$X_{n+1} = F(X_n, L_n), \;\; X_0 \in \mathbf{X}, \tag{1}$$

где $X_n \in \mathbf{R}^m$ — вектор состояния, $L_n \in \mathbf{R}^k$, $F(\cdot)$ — однозначная непрерывная функция, такая, что $F(0, L_n) = 0 \;\; \forall n \in [o; \infty)$; $L_n \in \mathbf{R}^k$ — вектор параметров, для которого задана его априорная оценка, $L_n \in \mathbf{L} \;\forall n \in [0, \infty)$ — ограниченное выпуклое множество.

Для анализа робастной устойчивости семейства систем (1), где $L_n \in \mathbf{L}$ вводится функция Ляпунова в виде

$$v_n = \|X_n\|. \tag{2}$$

Ее первая разность, вычисляемая в силу (1), равна

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = \|F(X_n, L_n)\| - \|X_n\|. \tag{3}$$

Выполнение нижеследующего неравенства

$$\max_{X_n \in \mathbf{X};\, L_n \in \mathbf{L}} \{\|F(X_n, L_n)\| - \|X_n\|\} < 0 \;\; \forall n \in [0; \infty) \tag{4}$$

является достаточным условием робастной устойчивости рассматриваемого семейства систем в области $\mathbf{X}$.

Для получения конструктивно проверяемых достаточных условий, следуя Е.А. Барбашину, нелинейную систему (1) представим в квазилинейной форме, используя соотношение

$$X_{n+1} = F(X_n, L_n) = \Phi(X_n, L_n, S)X_n, \tag{5}$$