Доклады Академии наук БССР

1983 Том XXVII № 9

УДК 517.982

Я. В. РАДЫНО

ПРОСТРАНСТВО ВЕКТОРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

(Представлено академиком АН БССР Н. П. Еругиным)

В настоящей заметке вводится понятие вектора экспоненциального типа относительно заданного неограниченного оператора в банаховом пространстве. На векторном пространстве таких векторов вводится естественным образом топология, которая оказывается неметризуемой. Изучается алгебраическая и топологическая структура этого пространства (непустота, отделимость, полнота, монтелевость и т. п.) и его сопряженного.

Приведены различные примеры.

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $A: X \to X$ — замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D(A)$. Через $D(A^n)$ обозначим пространство

$$D(A^n) = \{x \in X : x \in D(A), \ \ldots, \ A^{n-1}x \in D(A)\}, \tag{1}$$

наделенное нормой

$$\|x\|_{D(A^n)} = \sum_{k=0}^{n} \|A^k x\|. \tag{2}$$

Затем полагаем

$$D(A^\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n). \tag{3}$$

Это — пространство Фреше с нормами (2).

Далее, для каждого $\nu > 0$ определим пространство

$$D_A^\nu(X) = \{x \in D(A^\infty) : \exists\, c(x, \nu) > 0, \ \|A^k x\| \leqslant c\nu^k, \ k = 0, 1, \ldots\}. \tag{4}$$

Задавая в нем норму формулой

$$\|x\|_{D_A^\nu(X)} = \sup_{k \geqslant 0} \frac{\|A^k x\|}{\nu^k}, \tag{5}$$

получим банахово пространство. Оператор A действует в этом банаховом пространстве и там ограничен. Если $\nu_1 \leqslant \nu_2$, то имеет место вложение $D_A^{\nu_1}(X) \subset D_A^{\nu_2}(X)$ вместе с топологиями. Введем векторное пространство

$$\mathscr{E}xp_A X = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_A^\nu(X) \tag{6}$$

и зададим на нем естественную топологию индуктивного предела банаховых пространств $D_A^\nu(X)$, т. е.

$$\mathscr{E}xp_A X = \operatorname*{lim\,ind}_{\nu \to +\infty} D_A^\nu(X). \tag{7}$$

Элементы из $D_A^\nu(X)$ назовем векторами экспоненциального типа $\leqslant \nu$, а из $\mathscr{E}xp_A X$ — просто векторами экспоненциального типа.

Теорема 1. *Множество B ограничено в $\mathscr{E}xp_A X$ тогда и только то-*

гда, когда оно содержится в одном из пространств $D_A^{\nu}(X)$ и там ограничено.

Следствие. *Пространство $\mathscr{E}xp_A X$ отделимо и квазиполно.*

Теорема 2. *Если при каком-нибудь n вложение $D(A^n) \subset X$ компактно, то компактно вложение $D_A^{\nu_1}(X) \subset D_A^{\nu_2}(X)$ при $\nu_1 < \nu_2$.*

Следствие 1. *При условиях теоремы 2 пространство $\mathscr{E}xp_A X$ монтелевское, т. е. каждое ограниченное множество в нем предкомпактно.*

Следствие 2. *При условии теоремы 2 пространство $\mathscr{E}xp_A X$ полно.*

Сейчас выясним вопрос о непустоте пространства $\mathscr{E}xp_A X$. Очевидно, что, если оператор A пространства X обладает полной системой собственных векторов, тогда $\mathscr{E}xp_A X$ плотно в X.

С другой стороны, известный пример Р. Филлипса показывает, что если A — генератор сильно непрерывной полугруппы $G(t)$ в банаховом пространстве X, то $\mathscr{E}xp_A X$ может быть равно $\{0\}$.

Пример. $X = L_p(0, +\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$, $x \in L_p(0, +\infty)$,

$$G(t)\,x(s) = \begin{cases} x(s-t), & s \geqslant t, \\ 0, & s < t. \end{cases}$$

Тогда $A = d/dt$, $D(A) = \{x \in L_p(0, +\infty) : x'(t) \in L_p(0, +\infty),\ x(0) = 0\}$. Поэтому $D_A^{\nu}(X)$ должно состоять из аналитических функций $x(t)$ при $t \geqslant 0$ и $x^{(k)}(0) = 0$ для всех k. А это значит, что $D_A^{\nu}(X) = \{0\}$ для любого ν.

Поэтому $\mathscr{E}xp_A X = \{0\}$.

Однако справедлива

Теорема 3. *Если A—генератор ограниченной сильно непрерывной группы $G(t)$ в банаховом пространстве X, то пространство $\mathscr{E}xp_A X$ плотно в X.*

Далее, предполагая пространство X рефлексивным, а оператор A таковым, что $\mathscr{E}xp_A X$ плотно в X, будем иметь цепочку непрерывно и плотно вложенных друг в друга пространств

$$\mathscr{E}xp_A X \subset X \subset (\mathscr{E}xp_{A^*} X^*)'. \tag{8}$$

Здесь X^* — банахово сопряженное к X, а $(\mathscr{E}xp_{A^*} X^*)'$ — сильное сопряженное к локально выпуклому пространству $\mathscr{E}xp_{A^*} X^*$, A^* — оператор, сопряженный к неограниченному оператору $A : X \to X$. Поскольку оператор $A^* : \mathscr{E}xp_{A^*} X^* \to \mathscr{E}xp_{A^*} X^*$ непрерывен, то определен и непрерывен оператор $A^{*\prime} : (\mathscr{E}xp_{A^*} X^*)' \to (\mathscr{E}xp_{A^*} X^*)'$, который является расширением оператора A. Оператор $A^{*\prime}$ мы будем называть слабым расширением оператора A и обозначать той же буквой A.

Теорема 4. *Пространство $(\mathscr{E}xp_A X)'$ является пространством Фреше, т. е. полным метризуемым. Всякий элемент $f \in (\mathscr{E}xp_A X)'$ может быть (не единственным образом) представлен в виде*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} A^{*k} e_k, \tag{9}$$

где $(e_k) \in X^*$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \|e_k\| < +\infty, \quad \forall \nu, \tag{10}$$

и в равенстве (9) слабое расширение оператора A^*.

Причем сильная топология пространства $(\mathscr{E}xp_A X)'$ задается нормами

$$\|f\|_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \|e_k\|. \tag{11}$$

Обратно, всякий элемент вида (9) при условии (10) принадлежит $(\mathscr{E}xp_A X)'$.

Кроме того, при условии теоремы 2 $(\mathscr{E}xp_A X)'$ *— монтелевское пространство.*

Примеры. 1. Пусть $X = C_b(\mathbf{R})$ — пространство непрерывных ограниченных на $\mathbf{R}$ функций с естественной нормой $\|x\| = \sup_t |x(t)|$, $A = d/dt$, $D(A) = C^1(\mathbf{R})$. Тогда пространство $\mathscr{E}xp_A X = \mathscr{E}xp_{\frac{d}{dt}} C_b(\mathbf{R})$ совпадает с пространством целых функций экспоненциального типа, ограниченных на действительной оси (см. [1]).

2. Если $X = L_p(\mathbf{R})$, $1 \leqslant p < +\infty$, $A = d/dt$, $D(A) = W_p^1(\mathbf{R})$, то справедлива

Теорема 5. *Пространство* $\mathscr{E}xp_{d/dt} L_p(\mathbf{R})$ *совпадает с пространством целых функций экспоненциального типа, принадлежащих пространству* $L_p(\mathbf{R})$ *на действительной оси.*

Отметим, что такие пространства часто встречаются в теории приближений (см., например, [2]).

3. Обозначим через $\mathscr{E}xp\,\mathbf{C}$ пространство целых функций экспоненциального типа, т. е. целых функций $x(z)$, для которых существуют константы $c>0$ и $\nu>0$ такие, что

$$|x(z)| \leqslant ce^{\nu|z|} \text{ для всех } z \in \mathbf{C}. \tag{12}$$

Оно естественным образом топологизируется. А именно для каждого $\nu > 0$ обозначим

$$\mathscr{E}xp^\nu \mathbf{C} = \{x(z) : |x(z)| \leqslant ce^{\nu|z|},\ z \in \mathbf{C}\}. \tag{13}$$

Это — банахово пространство с нормой

$$\|x\|_\nu = \sup_{z\in\mathbf{C}} \frac{|x(z)|}{e^{\nu|z|}}. \tag{14}$$

При $\nu_1 \leqslant \nu_2$ имеет место вложение $\mathscr{E}xp^{\nu_1}\mathbf{C} \subset \mathscr{E}xp^{\nu_2}\mathbf{C}$ вместе с топологиями. Поскольку

$$\mathscr{E}xp\,\mathbf{C} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathscr{E}xp^\nu \mathbf{C},$$

то на $\mathscr{E}xp\,\mathbf{C}$ естественно определить топологию как $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \operatorname{ind} \mathscr{E}xp^\nu \mathbf{C}$.

Выбрав $X = C[a, b]$, $X = L_p(a, b)$, $A = d/dt$, определим пространства $\mathscr{E}xp_{\frac{d}{dt}} C[a, b]$, $\mathscr{E}xp_{\frac{d}{dt}} L_p(a, b)$.

Имеет место следующий факт.

Теорема 6. *Пространства* $\mathscr{E}xp_{\frac{d}{dt}} C[a, b]$, $\mathscr{E}xp_{\frac{d}{dt}} L_p(a, b)$ *и* $\mathscr{E}xp\,\mathbf{C}$ *совпадают алгебраически и топологически.*

Замечание. В заключение хотим отметить, что теория таких пространств, зависящих от n коммутирующих между собой операторов $A_1, \ldots, A_n$, аналогична, однако построения более тонкие.

Summary

The concept of an exponential type vector for a prescribed infinite operator is introduced. The algebraic and topological structure for a set of these vectors is studied.

Литература

[1] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.— 407 с.
[2] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.— 480 с.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило 28.12.82