

Об аппроксимации отклонения непараметрической оценки плотности вероятностей, построенной по зависимым данным, от истинной функции

Рассматривается аппроксимация интегральной среднеквадратичной ошибки в задаче выбора оптимального параметра размытости при непараметрическом ядерном оценивании маргинальной плотности распределения вероятностей стационарного случайного процесса. Приводятся требования, которым должны удовлетворять коэффициенты аппроксимации, чтобы выполнялись условия состоятельности для случая, когда число наблюдений неограниченно возрастает. Предлагается приближенная формула для вычисления оптимального параметра размытости для зависимых данных. Результаты иллюстрируются применениями к диффузионным случайным процессам, моделирующим изменение процентных ставок на финансовых рынках.

Одним из наиболее известных и популярных подходов при использовании непараметрического оценивания плотности вероятностей является ядерное оценивание. Оно предполагает меньшие ограничения, чем в параметрическом случае. Существует большое количество работ, где для построения непараметрических оценок используются выборочные данные, которые являются независимыми в совокупности (см. например [1], [2]). Однако при рассмотрении процессов финансового рынка часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда рассматриваемые данные (например, процентные ставки, наблюдаемые в течение определенного промежутка времени) являются зависимыми. В данном случае усложняется выбор основной характеристики непараметрической оценки – оптимального параметра размытости. Задачей статьи является исследование аппроксимации меры качества оценки – интегральной среднеквадратичной ошибки оценивания MISE (Mean Integrated Squared Error) с целью нахождения формулы для оптимального параметра размытости в случае зависимых данных, причем должны выполняться условия состоятельности. Результаты иллюстрируются применением к случайным процессам, моделирующим изменение процентных ставок на финансовых рынках.

Пусть X является стационарным случайным процессом с неизвестной маргинальной плотностью $f(x)$ и пусть X_1, \dots, X_n – отсчеты этого процесса соответственно в моменты времени $t + \Delta, t + 2\Delta, \dots, t + (n-1)\Delta, t + n\Delta$ ($\Delta > 0$). В качестве оценки функции $f(x)$ рассмотрим статистику [1, с.2]

$$f_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right),$$

где h – параметр размытости, который должен удовлетворять условиям состоятельности [1, с. 7]:

$$h \rightarrow 0, \quad hn \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

а $K(x)$ – ядерная функция, имеющая свойства симметричной плотности распределения вероятностей [2, с. 2302].

Найдём оптимальное значение параметра h , минимизирующее интегральную среднеквадратичную ошибку оценивания $MISE(h)$ [1, с. 5]:

$$MISE(h) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} E[(f_h(x) - f(x))^2] dx. \quad (2)$$

Так как найти оптимальный параметр размытости в явной форме из выражения (2) не удается, будем определять его приближенно с определенной точностью. Обычно при поиске оптимального h представляют (2) в виде степенного ряда по параметру h и ограничиваются несколькими первыми членами разложения. Разлагая выражение (2) в ряд Тейлора в окрестности точки $h = 0$, выделяя из полученного представления только зависящие от h слагаемые до порядка h^4 , получим функцию, которую мы будем использовать для поиска оптимального параметра размытости:

$$g(h) = \frac{v_2(K)}{hn} + \mu_2(K)h^2 \left(\frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \int_{-\infty}^{\infty} j f_{0,2}^{(2)}(x, x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^{(2)}(x) dx \right) + \frac{h^4}{12} \left(\frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \int_{-\infty}^{\infty} (j f_{0,4}^{(4)}(x, x) \mu_4(K) + 3 j f_{2,2}^{(4)} \mu_2^2(K)) dx - \mu_4(K) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^{(4)}(x) dx \right), \quad (3)$$

Здесь обозначено $v_2(K) = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du$, $\mu_r(K) = \int_{-\infty}^{\infty} u^r K(u) du$, $j f_{k,m-k}^{(m)}(x, x) = \left. \frac{\partial^m f_j(t, s)}{\partial t^k \partial s^{m-k}} \right|_{t=s, s=x}$, где $f_j(t, s)$ –

совместная плотность отсчетов X_k и X_{k+j} , $k = \overline{1, n-j}$, $j = \overline{1, n-k}$, процесса X . Также для простоты обозначим

коэффициент при h^2 через α , а коэффициент при h^4 через β . Необходимым условием экстремума функции (3) является

$$\frac{v_2(K)}{-h^2 n} + 2\alpha h + 4\beta h^3 = 0 \text{ или } h^4 + \frac{\alpha h^2}{2\beta} - \frac{v_2(K)}{4\beta h n} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, оптимальный параметр размытости при зависимых наблюдениях для достаточно большой выборки определяется из уравнения (4).

В качестве примера найдём α и β для диффузионных случайных процессов, используемых в стохастической финансовой математике для моделирования изменения краткосрочных процентных ставок на финансовых рынках. Рассмотрим модель Васичека и модель Кокса – Ингерсолла – Росса (модель CIR).

Модель Васичека задается стохастическим дифференциальным уравнением [3, с. 185]

$$dX = k(\theta - X)dt + \sigma dW(t), \quad (5)$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, а k , θ , σ – постоянные параметры. Ввиду линейности уравнения (5) относительно X , случайный процесс, порождаемый им, является нормальным марковским с

маргинальной плотностью вероятностей $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sqrt{D}}\right)^2\right]$, где $D = \frac{\sigma^2}{2k}$. Совместная

плотность $f_j(t, x) = \frac{1}{2\pi D \sqrt{1-\rho^{2j}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\theta-(x-\theta)\rho^j}{\sqrt{D(1-\rho^{2j})}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sqrt{D}}\right)^2\right]$, где $\rho = e^{-k\Delta}$ – коэффициент

корреляции между соседними отсчетами.

Модель CIR описывается уравнением [4, с. 390]

$$dX = k(\theta - X)dt + \sigma\sqrt{X}dW(t).$$

Здесь, как и в предыдущем случае, $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, а k , θ , σ – постоянные параметры. Маргинальная плотность вероятностей этого процесса является плотностью гамма

распределения $f(x) = \frac{c_0^{q+1} x^q}{\Gamma(q+1)} e^{-c_0 x}$, $x \geq 0$, где $c_0 = \frac{2k}{\sigma^2}$, $q = \frac{2k\theta}{\sigma^2} - 1$. Совместная плотность может быть

записана в виде [5, с. 174] $f_j(t, s) = \sum_{i=0}^{\infty} b(i|q+1, \rho^j) g(t|q+i+1, c_j) g(s|q+i+1, c_j)$, $0 < t, s < \infty$, где

$$b(i|q, a) = \frac{\Gamma(q+i)}{i!\Gamma(q)} a^i (1-a)^q, \quad g(x|q+1, c) = \frac{c^{q+1} x^q}{\Gamma(q+1)} e^{-cx}, \quad c_j = \frac{2k}{\sigma^2(1-\rho^j)}, \quad \rho = e^{-k\Delta}, \quad j=1, 2, \dots$$

Выражения для коэффициентов α и β формулы (4) для моделей Васичека и CIR таковы:

$$\alpha = s_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{\sqrt{(1-\rho^j)^3}} \right), \quad \beta = s_2 \left(\frac{2\mu_4(K) + 6\mu_2^2(K)}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{\sqrt{(1-\rho^j)^5}} - \mu_4(K) \right), \quad (6)$$

где $s_1 = \frac{\mu_2(K)}{2D^{3/2}\sqrt{\pi}}$, $s_2 = \frac{1}{32D^{5/2}\sqrt{\pi}}$ для модели Васичека и $s_1 = \frac{c_0^3 \Gamma(q-0,5) \mu_2(K)}{2\Gamma(q+1)\sqrt{\pi}}$, $s_2 = \frac{c_0^5 \Gamma(q-1,5)}{32\Gamma(q+1)\sqrt{\pi}}$ для

CIR. Таким образом, коэффициенты α и β для рассматриваемых моделей совпадают с точностью до постоянных множителей. Легко показать, что при достаточно больших n и $\rho > 0$ для выражений (6) справедливы неравенства $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать только случай $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

Решение биквадратного уравнения (4) при условии, что $\alpha < 0$, $\beta > 0$, имеет вид

$$h^2 = -\frac{\alpha}{4\beta} - \frac{\alpha}{4\beta} \sqrt{1 + \frac{4\beta v_2(K)}{\alpha^2 n h}}. \quad (7)$$

Найдём условия, которым должны удовлетворять α и β , чтобы выполнялось (1). При этом возможны 2 следующие задачи:

Задача 1.

При построении непараметрической оценки плотности величина Δ остаётся постоянной. Исходя из (3), определим порядок α и β . Введём обозначение

$$S_n = \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \int_{-\infty}^{\infty} \left({}_j f_{0,2}^{(2)}(x,x) - f(x)f^{(2)}(x) \right) dx.$$

Очевидно, что подынтегральная функция с ростом j монотонно стремится к нулю.

Перепишем α как

$$\alpha = \mu_2(K) \left(S_n - \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^{(2)}(x) dx \right). \quad (8)$$

Так как по условию $\alpha < 0$, и нетрудно показать, что второе слагаемое в последнем выражении неотрицательно, то для любого j интеграл в S_n неположителен. Заметим, что для независимых наблюдений $S_n = 0$ и из (8) $\alpha = O(n^{-1})$, однако данной величиной обычно пренебрегают [1, с. 7] и полагают $\alpha = 0$.

Справедливы оценки

$$S_n \geq \frac{2(n-1)}{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x)f^{(2)}(x) - {}_1 f_{0,2}^{(2)}(x,x) \right) dx, \quad (9)$$

$$S_n \leq \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{\infty} (n-j) \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x)f^{(2)}(x) - {}_j f_{0,2}^{(2)}(x,x) \right) dx, \quad (10)$$

$$S_n \leq \frac{2}{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x)f^{(2)}(x) - {}_1 f_{0,2}^{(2)}(x,x) \right) dx \sum_{j=1}^{n-1} (n-j), \quad (11)$$

Порядок правой части (9) равен n^{-1} . Если ряд (10) сходится, то порядок правой части (10) равен n^{-1} , если расходится, то из (11) мы заключаем, что S_n не превосходит некоторой константы. Отсюда следует, что $\alpha \sim -an^k$, $k \in [-1, 0]$.

Теперь оценим первое слагаемое в β . Очевидно, что оно не превосходит величины

$$\max_j \int_{-\infty}^{\infty} \left| {}_j f_{0,4}^{(4)}(x,x) \mu_4(K) + 3 {}_j f_{2,2}^{(4)} \mu_2^2(K) \right| dx \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j).$$

Таким образом, порядок верхней оценки коэффициента β равен n^0 . Предположим, что $\beta \sim bn^m$, $m \leq 0$.

Найдём условия, которым должны удовлетворять α и β , чтобы выполнялось (1).

Случай 1. Пусть в выражении (7) второе слагаемое под корнем стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$h^2 \sim -\frac{\alpha}{4\beta} \sim \frac{an^k}{4bn^m}. \quad \text{Отсюда и из (1) следует, что } k-m < 0, \text{ а } k-m+2 > 0. \text{ Далее,}$$

$$\frac{4\beta v_2(K)}{\alpha^2 nh} \sim \frac{8bn^m v_2(K)}{a^2 n^{2k} n \sqrt{-\alpha/\beta}} \rightarrow 0 \text{ по условию. Поэтому мы имеем неравенство } \frac{3m}{2} - \frac{5k}{2} - 1 < 0. \text{ Объединяя}$$

все неравенства, получим область a , представленную на рисунке 1.

Случай 2. Пусть в выражении (7) второе слагаемое под корнем стремится к бесконечности при

$$n \rightarrow \infty. \text{ Тогда } h^2 \sim -\frac{\alpha}{4\beta} \sqrt{\frac{4\beta v_2(K)}{\alpha^2 nh}} \text{ или } h \sim \left(\frac{v_2(K)}{4\beta n} \right)^{1/5} \sim \left(\frac{v_2(K)}{4bn^{m+1}} \right)^{1/5}. \text{ Отсюда и из (1) следует, что}$$

$$-0,2m - 0,2 < 0 \text{ и } -0,2m + 0,8 > 0. \text{ Неравенство } \frac{6m}{5} - 2k - \frac{4}{5} > 0 \text{ получается из условия случая 2:}$$

$$\frac{4\beta v_2(K)}{\alpha^2 nh} \sim \frac{(4b)^{6/5} (v_2(K))^{4/5} n^{6m/5}}{a^2 n^{2k+4/5}} \rightarrow \infty. \text{ Отсюда имеем область } b \text{ (рис. 1).}$$

$$\text{Случай 3. Пусть } \frac{4\beta v_2(K)}{\alpha^2 nh} \rightarrow c, \text{ где } c > 0 \text{ — некая константа. Таким образом, } h \sim \frac{4\beta v_2(K)}{a^2 c} n^{m-2k-1}.$$

С другой стороны, из (7) следует, что $h^2 \sim -\frac{\alpha}{4\beta} - \frac{\alpha}{4\beta} \sqrt{1+c} \sim \frac{an^k}{4bn^m} (1 + \sqrt{1+c})$. Тогда мы получаем равенство $m-2k-1 = 0,5k-0,5m$ или $3m-5k-2=0$, $k \in (-1, 0]$, $m \in (-1, 0]$. Данному случаю соответствует граница областей a и b на рисунке 1.

Найдём порядок α и β для моделей Васичека и CIR. Перепишем α из (6) как

$$\alpha = s_1 \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\rho^j)^3}} - 1 \right) \right].$$

Оценка сверху для второго слагаемого данного выражения будет следующей:

$$\frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\rho^j)^3}} - 1 \right) \leq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\rho^j)^3}} - 1 \right).$$

При помощи формулы Тейлора можно показать, что данный ряд сходится. Получим оценку снизу для второго слагаемого в α :

$$\frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\rho^j)^3}} - 1 \right) \geq \frac{2(n-1)}{n^2} \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\rho)^3}} - 1 \right).$$

Из выражения для α и полученных оценок следует, что $\alpha = O(n^{-1})$.

Оценим первое слагаемое в выражении (6) для β . Верхняя и нижняя оценки будут следующими:

$$\frac{2\mu_4(K) + 6\mu_2^2(K)}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{\sqrt{(1-\rho^j)^5}} \leq \frac{(2\mu_4(K) + 6\mu_2^2(K))n(n-1)}{2n^2 \sqrt{(1-\rho)^5}} \sim \frac{\mu_4(K) + 3\mu_2^2(K)}{\sqrt{(1-\rho)^5}},$$

$$\frac{2\mu_4(K) + 6\mu_2^2(K)}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{\sqrt{(1-\rho^j)^5}} \geq \frac{(2\mu_4(K) + 6\mu_2^2(K))n(n-1)}{2n^2} \sim \mu_4(K) + 3\mu_2^2(K).$$

Таким образом, порядок первого слагаемого в β будет равен n^0 . Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$ коэффициент β не стремится к нулю. Отсюда сразу следует, что при $n \rightarrow \infty$ β стремится к некоторому положительному числу. Таким образом, мы получили, что модели Васичека и CIR соответствуют случаю 2 и $h_{opt} = O(n^{-1/5})$.

Задача 2.

При построении непараметрической оценки плотности мы пользуемся n наблюдениями процесса X на некотором конечном интервале времени длины T . Интервалы времени между наблюдениями определяются как $\Delta = T/n$. Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется условие $\Delta \rightarrow 0$. Отсюда следует, что корреляция между данными увеличивается и в пределе становится равной единице. Входящие в определение α и β совместные функции распределения стремятся к маргинальной функции, умноженной на дельта-функцию (по крайней мере, для малых j), то есть $f_j(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)\delta(y-x)$. Так как $y = x$ при вычислении α и β (см. (3)), то в итоге при $n \rightarrow \infty$ коэффициенты α и β неограниченно возрастают. Поэтому предположим, что $\alpha \sim -an^k$, $k > 0$, а $\beta \sim bn^m$, $m > 0$.

Рассмотрение в данной ситуации случаев 1-3 будет приводить к тем же системам, что и в задаче 1, за исключением того, что здесь $k > 0$, $m > 0$. Случаю 1 будет соответствовать область a на рисунке 2, случаю 2 – область b , случаю 3 – граница областей a и b .

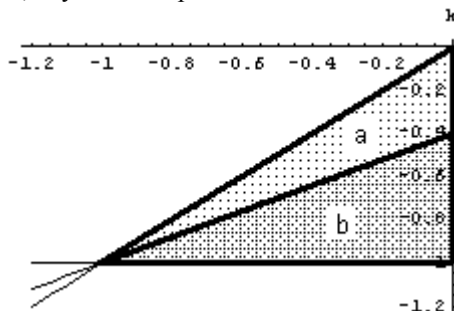


Рис. 1.

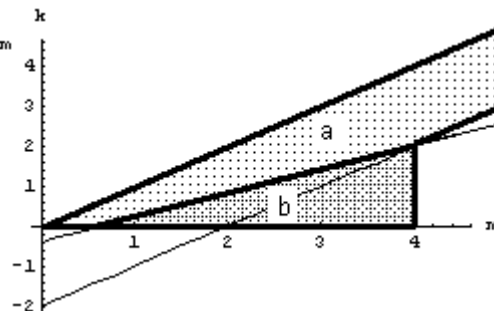


Рис. 2.

Найдем порядок величин α и β (6) для моделей Васичека и CIR. Оценим вначале второе слагаемое в выражении для α :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{\sqrt{(1-\rho^j)^3}} > \frac{1}{n^2} \frac{n-1}{\sqrt{(1-\rho)^3}} \quad (12).$$

Заменим выражение $1 - \rho = 1 - e^{-k\Delta} = 1 - e^{-kT/n}$ эквивалентным при $n \rightarrow \infty$: $1 - e^{-kT/n} \sim kT/n$. В этом случае правая часть (12) будет эквивалентна величине $\sqrt{n}/(Tk)^{3/2}$.

Найдем теперь порядок оценки сверху. Очевидно, что эквивалентность $1 - e^{-kTj/n} \sim kTj/n$ справедлива для таких значений j , порядок которых меньше n . Заметим также, что данная эквивалентность остаётся в силе и для $j = cn$ при таких $c \ll 1$, для которых величина $kTj/n = kTc$ близка к нулю. При $n \rightarrow \infty$ значение c всегда можно выбрать в зависимости от k и T . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{\sqrt{(1-\rho^j)^3}} &< \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{cn} \frac{1}{\sqrt{(1-e^{-kTj/n})^3}} + \frac{1}{n} \sum_{j=cn+1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(1-e^{-kTc})^3}} \sim \\ &\sim \frac{n^{3/2}}{n(Tk)^{3/2}} \sum_{j=1}^{cn} \frac{1}{j^{3/2}} + \frac{1}{n} \sum_{j=cn+1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(1-e^{-kTc})^3}} < \frac{\sqrt{n}}{(Tk)^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-e^{-kTc})^3}}. \end{aligned}$$

Ряд в последнем выражении сходится. Таким образом, используя оценки сверху и снизу для вышерассмотренной суммы, получим, что при $n \rightarrow \infty$ $\alpha = O(n^{1/2})$. Аналогичным способом можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ $\beta = O(n^{3/2})$. Это соответствует случаю 3, причем для моделей Васичека и CIR $h_{opt} = O(n^{-1/2})$.

Таким образом, для данной ситуации для нахождения оптимального h приходится решать уравнение пятой степени, которое получается из (4). Чтобы упростить задачу, построим более простую приближенную формулу для случая 3. Оптимальный параметр для функции $g(h)$ будем искать с использованием выражения

$$h^* = \left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^{1/5} + a \left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^b.$$

Неизвестные константы a и b найдём, подставив это значение в уравнение необходимого условия экстремума (4), переписав его в виде

$$\frac{4\beta n h^5}{v_2(K)} = 1 - \frac{2\alpha n h^3}{v_2(K)}. \quad (13)$$

Представим $(h^*)^5$ и $(h^*)^3$ в виде разложения по формуле бинома Ньютона и подставим эти выражения в уравнение (13). Получим

$$\begin{aligned} \frac{4\beta n}{v_2(K)} \left(\left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right) + 5 \left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^{4/5+b} a + 10 \left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^{3/5+2b} a^2 + \dots \right) = \\ = 1 - \frac{2\alpha n}{v_2(K)} \left(\left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^{3/5} + 3 \left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^{2/5+b} a + 3 \left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^{1/5+2b} a^2 + \left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^{3b} a^3 \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что первые слагаемые справа и слева равны единице. Приравняв вторые слагаемые, получим, что приближенная формула для определения оптимального параметра размытости примет вид

$$h^* = \left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^{1/5} - \frac{\alpha}{10\beta} \left(\frac{v_2(K)}{4n\beta} \right)^{-1/5}. \quad (14)$$

Очевидно, что (14) справедлива для случая независимых наблюдений, так как тогда она

превращается в широко известную формулу $h_{opt} = \left(v_2(K) / \left(\mu_2^2(K) \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(2)}(y)]^2 dy \right) \right)^{1/5}$, (см. например

[1, с. 8])

Определим порядки α и β , при которых выполняются условия (1). Легко показать, что выполнение данных условий для первого и второго слагаемого (14) приводит к неравенству $-1 < 2k - m < 0$, $m \in (-1, 4)$.

На рисунке 3 (закрашенные области) представлено решение данной системы для $k \in (-1, 0]$, $m \in (-1, 0]$ (левый рисунок) и $m \in (0, 4)$ (правый). Утолщенными линиями обозначены границы областей, которые получены при анализе задач 1 и 2. Из рисунка следует, что (14) может применяться не только для случая 3 задачи 2.

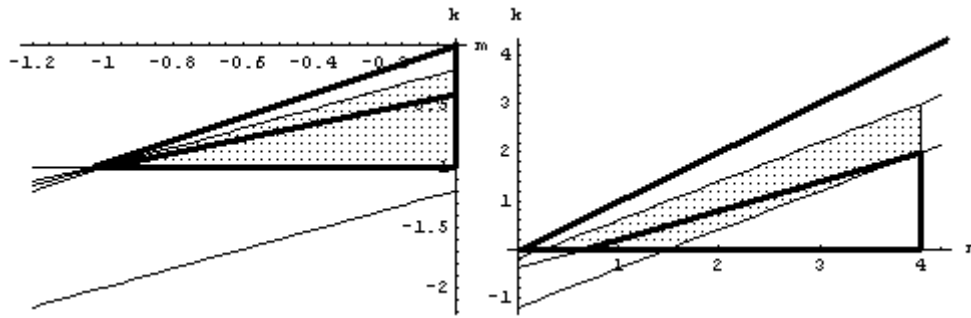


Рис. 3.

Определим теперь, как соотносятся между собой параметры размытости, определяемые по формуле (14) и решением уравнения (4). Используя необходимое условие экстремума (13), можно показать, что справедливы следующие два утверждения:

Утверждение 1. Пусть выполняется условие $-\alpha \leq h_g^2 \beta$, где h_g – параметр, полученный минимизацией функции $g(h)$. Тогда параметр размытости h^* , определяемый по формуле (14) удовлетворяет неравенству $0,8h_g < h^* < 1,2h_g$.

Утверждение 2. Пусть выполняется условия $-\alpha > h_g^2 \beta$ и $\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}} \leq 5\sqrt{\frac{v_2(K)}{2\beta n}}$. Тогда параметр размытости h^* , определяемый по формуле (14) удовлетворяет неравенству $0,7h_g < h^* < 1,2h_g$.

Таким образом, для ситуаций, рассмотренных в утверждениях, величина h^* может быть использована для аппроксимации оптимального параметра h_g функции $g(h)$.

Изложенные выше результаты показывают, как влияет зависимость отсчетов выборки на параметр размытости. Если для независимых данных из (3) следует, что порядок α всегда равен n^{-1} , а порядок β – n^0 , что соответствует случаю 2 задачи 1, то при наличии зависимости мы получаем также и задачу 2. Для зависимых наблюдений мы, исходя из (3) не можем определить знаки α и β . Поэтому могут существовать случайные процессы, для которых вышерассмотренное условие $\alpha < 0$, $\beta > 0$ не будет выполняться, и уравнение (7) будет иметь решения, отличные от рассмотренных нами.

К сожалению, получающиеся формулы для значений параметров размытости не могут быть непосредственно использованы для вычисления непараметрических оценок, так как в них используется информация об оцениваемых плотностях. Однако приведенный анализ позволяет определить характер влияния зависимости на порядки коэффициентов функции (3) и может быть полезным для выяснения потенциальных возможностей непараметрических оценок.

Литература

1. Turlach B.A. Bandwidth selection in kernel density estimation: a review. Technical report, Univ. Catholique de Louvain, 1993.
2. Engle R.F., McFadden D.L. (ed.) Handbook of Econometrics. Vol. IV. Chapt. 38. Elsevier Science, 1994. – pp. 2297-2339.
3. Vasicek O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure // Journal of Financial Economics. - 1977, Vol. 5. - pp. 177–188.
4. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. - 1985, Vol. 53. - pp. 385–406.
5. Медведев Г.А. Математические основы финансовой экономики: В 2 ч: Ч. 2. Мн.: БГУ, 2003. – 295 с.