ЦЕНЫ ФИНАНСОВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, КОГДА ЛОГАРИФМ ЦЕНЫ БАЗОВОГО АКТИВА ИМЕЕТ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

А. П. Богомолов, Г. А. Медведев

Академия управления при Президенте Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: andrey.bogomolov@gmail.com
MedvedevGA@bsu.by

Рассматривается применение пятипараметрического обобщенного гиперболического распределения для описания динамики процентной ставки и определения цен финансовых производных на основе преобразования Эсшера.

Ключевые слова: гиперболические распределения, финансовые производные, преобразование Эсшера, цена опциона.

Реальная стохастическая динамика финансовых индексов такова, что оценки плотностей вероятностей этих индексов имеют хвосты, затухающие медленнее, чем экспоненциально. Это означает, что такие плотности не могут быть аппроксимированы нормальными или гамма плотностями. Поэтому последнее время для описания стохастической динамики популярными стали устойчивые распределения. Однако их использование представляет некоторые неудобства, поскольку в случае таких распределений могут не существовать моменты, а также затруднено использование мартингального представления, требуемого для описания нейтральных к риску процессов. В этой ситуации представляет интерес применение гиперболических распределений, плотности которых с одной стороны выражаются в явной аналитической форме, а с другой – имеют так называемые полутяжелые хвосты. Обобщенные гиперболические распределения были введены в [1]. Вероятностные процессы, основанные на этих распределениях, были впервые использованы в финансовом анализе в [2].

Обобщенное гиперболическое распределение (*GH*) определяется как смесь нормальных распределений со случайными средними и дисперсиями, распределенными, в свою очередь, согласно обобщенному обратно-гауссовскому распределению (*GIG*). Такую смесь принято называть [3] гауссовским \\ обратно-гауссовским распределением. Формально плотность такой смеси распределений определяется интегралом

$$GH(x;\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)=\int_0^\infty N(x;\mu+\beta\omega,\omega)GIG(\omega;\lambda,\delta^2,\alpha^2-\beta^2)d\omega, \quad (1)$$

где $N(x;\xi,\eta)$ – нормальная плотность с математическим ожиданием ξ и дисперсией η. Параметры μ, δ и β являются соответственно параметрами положения, масштаба и асимметрии. Увеличение отношения α/β соответствует увеличению эксцесса. Плотность обобщенного обратно-гауссовского распределения $GIG(\omega;\lambda,\delta^2,\alpha^2-\beta^2)$ определена на положительной полуоси, описывается тремя параметрами и определяется выражением

$$GIG(\omega;\lambda,\delta^2,\alpha^2-\beta^2)=\frac{(\gamma/\delta)^{\lambda}\omega^{\lambda-1}}{2K_{\lambda}(\delta\gamma)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\omega}+\gamma^2\omega\right)\right),\ \omega>0,\ \gamma^2=\alpha^2-\beta^2,$$

где при $\lambda<0$, $\delta>0$, $\gamma\ge 0$; при $\lambda=0$, $\delta>0$, $\gamma>0$; при $\lambda>0$, $\delta\ge 0$, $\gamma>0$. K_λ – модифицированная функция Бесселя третьего рода порядка λ.

С учетом этого имеем явное аналитическое выражение

$$GH(x;\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)=\frac{(\gamma/\delta)^{\lambda}}{\sqrt{2\pi}K_{\lambda}(\delta\gamma)}\,\frac{K_{\lambda-1/2}(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})}{(\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}/\alpha)^{1/2-\lambda}}\,e^{\beta(x-\mu)},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Пятипараметрическое семейство GH-распределений является достаточно богатым и как частные случаи включает следующие распределения.

- Обобщенное гиперболическое распределение: $X\sim GH(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)$.
- Гиперболическое распределение: $X\sim H(\alpha,\beta,\delta,\mu)\equiv GH(1,\alpha,\beta,\delta,\mu)$, $\lambda=1$.
- Асимметричное распределение Лапласа: $X\sim H(\alpha,\beta,0,\mu)$, $\lambda=1$, $\delta=0$.
- Нормальное распределение: $X\sim N(\mu,\sigma^2)\equiv H(\alpha,0,\delta,\mu)$, $\alpha\to\infty$, $\delta\to\infty$, $\delta/\alpha\to\sigma^2$.
- Нормальное обратно-гауссовское: $X\sim NIG(\alpha,\beta,\delta,\mu)=GH(-1/2,\alpha,\beta,\delta,\mu)$, $\lambda=-1/2$.
- Распределение Коши: $X\sim C(\delta,\mu)\equiv NIG(0,0,\delta,\mu)=GH(-1/2,0,0,\delta,\mu)$.
- Нормальное \\ гамма: $X\sim VG(\lambda,\alpha,\beta,\mu)=GH(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)$, $\delta=0$, $\lambda>0$, $\alpha>|\beta|$.
- Асимметричное t-распределение: $X\sim GH(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)$, $\lambda<0$, $\delta>0$, $\alpha=|\beta|$.

Детальное описание свойств обобщенного гиперболического распределения содержится в [4]. Приведем лишь некоторые из них. Производящая функция моментов GH-распределения, которая потребуется нам для обоснования метода преобразований Эсшера при определении стоимости финансовых производных, вычисляется по формуле

$$M_{GH}(\tau)=e^{\tau\mu}\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-(\beta+\tau)^2}\right)^{\lambda/2}\frac{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+\tau)^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})},\quad |\beta+\tau|<\alpha.$$

Первые два момента GH-распределения имеют вид

$$E[X]=\mu+\frac{\beta\delta}{\gamma}\frac{K_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{K_{\lambda}(\delta\gamma)},\quad \gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$$

$$\mathrm{Var}[X]=\delta^2\left(\frac{K_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{\delta\gamma K_{\lambda}(\delta\gamma)}+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2\left[\frac{K_{\lambda+2}(\delta\gamma)}{K_{\lambda}(\delta\gamma)}-\left(\frac{K_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{K_{\lambda}(\delta\gamma)}\right)^2\right]\right).$$

Выражения для коэффициентов асимметрии и эксцесса достаточно сложные. Их аналитические выражения можно найти в [5].

GH-распределения имеют так называемые полутяжелые хвосты, поскольку

$$GH(x;\lambda,\alpha,\beta,\delta,0)\sim|x|^{\lambda-1}\exp[(\mp\alpha+\beta)x],\ \text{когда}\ x\to\pm\infty.$$

Наконец, отметим, что поскольку смешивающее GIG-распределение является безгранично делимым [6], то GH-распределение тоже безгранично делимое.

Рассмотрим финансовый рынок, который характеризуется обычными условиями. Моделируется два актива: 1) Безрисковый актив, цена которого B_t изменяется согласно уравнению: $B_0=1$, $dB_t=r\,B_t\,dt$, $0\le t\le T$. Здесь r – заданная процентная ставка и T – дата погашения актива. 2) Вторым активом является акция, цена которой S_t изменяется случайно таким образом, что $S_t=S_0\exp(X_t)$, $0\le t\le T$, где X_t – случайный процесс с независимыми приращениями и функцией распределения $P(x|t)$, которую принято называть объективной. Заметим, что математическое ожидание дисконтированного значения цены акции по объективной вероятностной мере в дату t в рассматриваемом случае определяется выражением $E[S_t e^{-rt}|S_0] = S_0 E[e^{-rt+X_t}] = S_0 e^{-rt} M_X(1|t)$.

Отсюда видим, что случайный процесс e^{-rt+X_t} является мартингалом, если выполняется равенство $M_X(1|t) = e^{rt}$. Иначе говоря, чтобы для любого t имелось представление $M_X(1|t) = M_X(1|1)^t$ и $M_X(1|1) = e^r$. Отсюда следует, что X_t должен быть случайным процессом с независимыми приращениями.

Предположим, что на рынке имеют хождение финансовые производные с функцией платежа $\theta(S_T)$ в дату погашения (исполнения) T. Справедливая стоимость (цена) такой финансовой производной в дату $t = 0$ вычисляется как математическое ожидание дисконтированного значения функции платежа, вычисленное по нейтральной к риску вероятностной мере. Такая мера должна обеспечивать дисконтированному процессу цены акции мартингальные свойства, чтобы выполнялось равенство $E^*[S_t e^{-rt}|S_0] = S_0$. Здесь через $E^*[.]$ обозначено математическое ожидание с использованием нейтральной к риску вероятностной меры Q. Эта мера к тому же должна быть также эквивалентной по отношению к объективной мере P. Таким образом, цена финансовой производной $V(t)$ в дату $t \geq 0$ вычисляется как математическое ожидание

$$V(t) = E^*[e^{-r(T-t)}\theta(S_T)|S_0] = E^*[e^{-r(T-t)}\theta(S_0 e^{X_T})|S_0]. \qquad (2)$$

Для определения цены финансовых производных в [7] было предложено использовать преобразование Эсшера объективной вероятностной меры в эквивалентную мартингальную меру. В дальнейшем этот подход был изучен детально в работах [8,9]. Для получения нейтральной к риску плотности вероятностей $f(x\,|\,h,\,t)$ процесса X_t используем преобразование Эсшера объективной плотности вероятностей $f(x|t)$, которое определяется соотношением

$$f(x\,|\,h,\,t) = \frac{e^{hx} f(x\,|\,t)}{\int_0^\infty e^{hx} f(x\,|\,t)dx} \equiv \frac{e^{hx} f(x\,|\,t)}{M_X(h\,|\,t)}. \qquad (3)$$

В свою очередь, производящая функция моментов $M_X(y\,|\,h,\,t)$ для плотности вероятностей $f(x\,|\,h,\,t)$ имеет вид:

$$M_X(y\,|\,h,\,t) = \int_0^\infty e^{yx} f(x\,|\,h,t)dx = \int_0^\infty \frac{e^{(y+h)x} f(x\,|\,t)}{M_X(h\,|\,t)}\,dx = \frac{M_X(y+h\,|\,t)}{M_X(h\,|\,t)}.$$

В этом случае для того, чтобы плотность $f(x\,|\,h,\,t)$ была нейтральной к риску, необходимо, чтобы $M_X(1\,|\,h,\,1) = e^r$ или

$$\ln\frac{M_X(h+1\,|\,1)}{M_X(h\,|\,1)} = r.$$

Это равенство следует рассматривать как уравнение относительно значения параметра преобразования h, обеспечивающего мартингальное свойство мере Q. Это значение обозначим h^*.

Когда случайный процесс X_t имеет обобщенное гиперболическое распределение, это уравнение приобретает следующую явную форму

$$\mu + \frac{\lambda}{2}\ln\left(\frac{\alpha^2-(\beta+h)^2}{\alpha^2-(\beta+h+1)^2}\right) + \ln\left(\frac{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+h)^2})}{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+h+1)^2})}\right) = r\,, \quad |\beta+h\ +1| < \alpha. \qquad (4)$$

Пожалуй, основной трудностью при определении параметра h^* является вычисление редко встречающейся модифицированной функции Бесселя третьего рода K_λ [10].

В случае, когда в представлении (1) вместо обобщенного обратно-гауссовского распределения $GIG(\omega;\ \lambda,\ \delta^2,\ \alpha^2-\beta^2)$ используется нормальное обратно-гауссовское распределение $NIG(\omega;\ \delta^2,\ \alpha^2-\beta^2) \equiv GIG(\omega;\ 1,\ \delta^2,\ \alpha^2-\beta^2)$ обобщенное гиперболическое распределение превращается в гиперболическое распределение с плотностью

$$H(x;\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \mu) = \frac{\gamma}{2\delta\alpha K_1(\delta\gamma)} \exp[-\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}+\beta(x-\mu)],$$

где $\alpha > |\beta|$, $\gamma^2 = \alpha^2-\beta^2$, $\delta \geq 0$, и $x, \mu \in (-\infty, +\infty)$.

В этом случае уравнение (4) значительно упрощается, приобретая вид

$$\mu + \delta[\sqrt{\alpha^2-(\beta+h)^2} - \sqrt{\alpha^2-(\beta+h+1)^2}\,] = r. \qquad (5)$$

Обозначим решение уравнения (4) (или (5)) через h^*. Если использовать в преобразовании (3) плотность $GH(x;\ \lambda,\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \mu)$ (или $H(x;\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \mu)$) в качестве объективной плотности $f(x|t)$ и в качестве параметра преобразования h^*, то можно получить нейтральную к риску плотность $f_{GH}(x\,|\,h^*, t)$ (или $f_H(x\,|\,h^*, t)$), которую и следует использовать в формуле (2) для определения цены финансовой производной $V(t)$.

Рассмотрим для примера случай, когда финансовой производной является европейский опцион-колл. Для него функция платежа имеет вид $\theta(S_T) = \max\{0,\ S_T - K\}$, где K – цена исполнения. Тогда цена опциона-колл в дату продажи $t = 0$ вычисляется по формуле

$$V(0) = S_0 \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} f_{GH}(x\,|\,h^*+1, T)\,dx - e^{-rT} K \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} f_{GH}(x\,|\,h^*, T)\,dx\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barndorff-Nielsen, O. E.* Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of Particle Size / O. E. Barndorff-Nielsen // Proc. Roy. Soc. London. 1977. V. A(353). P. 401–419.

2. *Eberlein, E.* Hyperbolic Distributions in Finance / E. Eberlein, U. Keller // Bernoulli. 1995. V. 1. P. 281–299.

3. *Ширяев, А. Н.* Основы стохастической финансовой математики / А. Н. Ширяев. М. : Фазис. 1998. Т. 1, 2. 1017 с.

4. *Bibby, B. M.* Hyperbolic Processes in Finance / B. M. Bibby, M. Sørensen // Working paper. Institute of Mathematical Sciences, University of Copenhagen. 2003. 26 p.

5. *Barndorff-Nielsen, O. E.* Hyperbolic Distributions and Ramifications: Contributions to Theory and Application / O. E. Barndorff-Nielsen, P. Blæsild // Research Report 68. Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus. 1980.

6. *Barndorff-Nielsen, O. E.* Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions / O. E. Barndorff-Nielsen, O. Halgreen // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1977. V. 38. S. 309–312.

7. *Gerber, H. U.* Option pricing by Esscher-transforms / H. U. Gerber, E. S. W. Shiu // Transactions of the Society of Actuaries. 1994. V. 46. P. 99–191.

8. *Keller, U.* Realistic modelling of financial derivatives / U. Keller. Dissertation, University of Freiburg. 1997.

9. *Prause, K.* The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures / K. Prause. Dissertation, University of Freiburg. 1999.

10. *Градштейн, И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М. : ГИФМЛ, 1962. 1100 с.