АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРИОРИТЕТНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Т. Романюк

Гродненский госуниверситет имени Я. Купалы
Гродно, Беларусь
romaniuk@grsu.by

В работе приведены результаты асимптотического анализа замкнутой по структуре сети массового обслуживания с приоритетными заявками, рассмотрено применение полученных результатов.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, разнотипные заявки, приоритетные заявки.

1. ОПИСАНИЕ СЕТИ

Рассмотрим замкнутую по структуре сеть массового обслуживания (МО) с центральной системой, в которой циркулируют заявки $r-1$-типа. Полагаем, что общее число заявок в сети в момент времени t описывается функцией времени $\sum_{i=1}^{r-1} K_i(t) = K(t)$, причем $K_i(t) = K_{i1}(t) + K_{i2}(t)$ составляют заявки типа i, $i = \overline{1, r-1}$, которые в свою очередь подразделяются на заявки класса 1 и класса 2. Заявки типа i обслуживаются в m_i-линейной системе массового обслуживания (СМО) S_i и поступают на обслуживание в центральную m_r-линейную систему S_r, после обслуживания в которой они переходят во внешнюю среду. Пребывание заявок во внешней среде будет соответствовать их пребыванию в системе S_0 с числом линий обслуживания $m_0 = N$, $K(t) \le N$. Из внешней среды заявки типа i поступают на обслуживание опять в систему S_i, $i = \overline{1, r-1}$. Переход некоторой заявки типа i класса c из системы S_0 в систему S_i происходит в случайные моменты времени независимо от того, в каком состоянии находятся другие заявки, и таким образом, что вероятность такого перехода на интервале времени $[t, t + \Delta t]$ равна $\mu_{0ic}(t)\Delta t + o(\Delta t)$, где $\mu_{0ic}(t)$характеризует интенсивность такого перехода, $i = \overline{1, r-1}$, $c = 1, 2$. Таким образом, в системе S_i, $i = \overline{1, r-1}$, могут обслуживаться только заявки типа i. Времена обслуживания заявок типа i любой из линий системы S_i распределены по показательному закону с интенсивностью μ_{ic} для заявок класса c, $c = 1, 2$, $i = \overline{1, r-1}$. В системе S_r обслуживаются заявки всех типов по показательному закону, интенсивность обслуживания в каждой линии системы S_r зависит лишь от класса обслуживаемой заявки и составляет μ_{rc} для заявок класса c, $c = 1, 2$. Считаем, что заявки одного класса, стоящие в очереди некоторой СМО, выбираются на обслуживание в соответствии с дисциплиной FIFO. Кроме того, предположим, что заявки класса 1 имеют абсолютный приоритет по отношению к заявкам класса 2 в системах S_i, $i = \overline{1,r}$.

2. НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СЕТИ

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором

$$k(t) = (k_{11}(t), k_{12}(t), k_{21}(t), k_{22}(t), ..., k_{r1}(t), k_{r2}(t)),$$

где $k_{ic}(t)$ – число заявок класса c в системе S_i, $i = \overline{1,r}$, $c = 1, 2$. Вектор $k(t)$ образует $2r$-мерный марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний.

Далее будем рассматривать случай большого числа заявок в сети $1 << K(t) \le N$ и перейдем к вектору относительных переменных

$$\xi(t) = \left(\frac{k_{11}(t)}{K(t)}, \frac{k_{12}(t)}{K(t)}, \frac{k_{21}(t)}{K(t)}, \frac{k_{22}(t)}{K(t)}, ..., \frac{k_{r1}(t)}{K(t)}, \frac{k_{r2}(t)}{K(t)}\right).$$

Возможные значения вектора $\xi(t)$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству $G(t) = \left\{x(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), ..., x_{r1}(t), x_{r2}(t)) : 0 \le x_{ic}(t) \le 1, \sum_{i=1}^{r}\sum_{c=1}^{2} x_{ic}(t) \le 1\right\}$, в котором они располагаются в узлах $2r$-мерной решетка на расстоянии $\varepsilon(t) = \frac{1}{K(t)}$ друг от друга. При возрастании значений функции $K(t)$ "плотность заполнения" множества $G(t)$ возможными значениями рассматриваемого вектора увеличивается и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение с плотностью вероятностей $p(x, t)$. Установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Плотность распределения вероятностей вектора $\xi(t)$ при условии, что она дважды дифференцируема по x, удовлетворяет с точностью $O(\varepsilon^2(t))$ дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка*

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{r}\sum_{c=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_{ic}}(A_{ic}(x,t)p(x,t)) +$$
$$+\frac{\varepsilon(t)}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\sum_{c,s=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_{ic}\partial x_{js}}\left(B_{icjs}(x,t)p(x,t)\right) + 2r\varepsilon(t)K'(t)p(x,t), \text{ где} \qquad (1)$$

$$A_{i1}(x,t) = \sum_{j=1}^{r} r_{j1i1}\mu_{j1}\varepsilon_{j1}(x_{j1}(t)) + \mu_{0i1}(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{r}\sum_{c=1}^{2} x_{jc}(t)\right),$$

$$A_{i2}(x,t) = \sum_{j=1}^{r} r_{j2i2}\mu_{j2}\varepsilon_{j2}(x_{j1}(t), x_{j2}(t)) + \mu_{0i2}(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{r}\sum_{c=1}^{2} x_{jc}(t)\right),$$
$$\mu_{0r1}(t) = 0, \mu_{0r2}(t) = 0, i = \overline{1,r},$$

$$B_{i1i1}(x,t) = \sum_{j=1}^{r} r^{*}_{j1i1}\mu_{j1}\varepsilon_{j1}(x_{j1}(t)) + \mu_{0i1}(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{r}\sum_{c=1}^{2} x_{jc}(t)\right),$$

$$B_{i2i2}(x,t)=\sum_{j=1}^{r} r^{*}_{j2i2}\mu_{j2}\varepsilon_{j2}(x_{j1}(t),x_{j2}(t))+\mu_{0i2}(t)\left(1-\sum_{j=1}^{r}\sum_{c=1}^{2}x_{jc}(t)\right),$$

$$r_{jcic}=\begin{cases}-1, & i=j,\ i=\overline{1,r};\\ 1, & i\neq j,\ i=r,\ j=\overline{1,r};\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$r^{*}_{jcic}=\begin{cases}1, & i=j,\ i=\overline{1,r};\\ 1, & i\neq j,\ i=r,\ j=\overline{1,r}; \qquad c=1,2;\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$B_{i1r1}(x,t)=B_{r1i1}(x,t)=-\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(x_{i1}(t)),$$

$$B_{i2r2}(x,t)=B_{r2i2}(x,t)=-\mu_{i2}\varepsilon_{i2}(x_{i1}(t),x_{i2}(t)),\ i=\overline{1,r-1},$$

$$B_{icjs}(x,t)=0 \text{ в остальных случаях, } \varepsilon_{i1}(x_{i1}(t))=\min(x_{i1}(t),l_i(t)),$$

$$\varepsilon_{i2}(x_{i1}(t),x_{i2}(t))=\begin{cases}x_{i2}(t), & x_{i1}(t)+x_{i2}(t)<l_i(t);\\ l_i(t)-x_{i1}(t), & x_{i1}(t)<l_i(t),\ x_{i1}(t)+x_{i2}(t)\geq l_i(t);\\ 0, & x_{i1}(t)\geq l_i(t);\end{cases}$$

$$l_i(t)=\frac{m_i}{K(t)},\ i=\overline{1,r}.$$

Применяя к уравнению (1) метод гауссова приближения, можем получить систему ОДУ для определения математических ожиданий компонент вектора $\xi(t)$, т. е. $n_{ic}(t)=M\left\{\frac{k_{ic}(t)}{K(t)}\right\}$ – среднего относительного числа заявок в системе S_{ic} в момент времени t, а также систему ДУ для определения дисперсий компонент вектора $\xi(t)$. Например, для получения системы ДУ для математических ожиданий полагаем, что плотность $p(x,t)$ является плотностью $2r$-мерного гауссовского процесса, разлагаем коэффициенты (1) в ряд Тейлора в окрестности точки (n,t), ограничиваясь первыми членами разложения, и подставляем производные нормальной плотности $p(x,t)$. Тогда, приравнивая члены при выражениях $(x_{ic}(t)-n_{ic}(t))$, $i=\overline{1,r}$, $c=1,2$, получим систему для определения $n_{ic}(t)$. В случае $K(t)=K\to\infty$ система ДУ имеет вид $n'_{ic}(t)=A_{ic}(n(t))$, $i=\overline{1,r}$, $c=1,2$ [1, 2]:

$$\begin{cases}n'_{i1}(t)=\sum\limits_{j=1}^{r} r_{j1i1}\mu_{j1}\varepsilon j1(n_{j1}(t))+\mu_{0i1}(t)\left(1-\sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{c=1}^{2}n_{jc}(t)\right);\\ n'_{i2}(t)=\sum\limits_{j=1}^{r} r_{j2i2}\mu_{j2}\varepsilon_{j2}(n_{j1}(t),n_{j2}(t))+\mu_{0i2}(t)\left(1-\sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{c=1}^{2}n_{jc}(t)\right);\\ \mu_{0r1}(t)=0,\ \mu_{0r2}(t)=0,\ i=\overline{1,r}.\end{cases} \tag{2}$$

Правые части системы (2) являются кусочно-линейными функциями. Определим явную форму системы (2) в областях линейности правой части (2). Обозначим множество индексов компонент вектора $n(t)=(n_{11}(t),n_{12}(t),n_{21}(t),n_{22}(t),...,n_{r1}(t),n_{r2}(t))$ через $\Omega=\{11,12,21,22,...,r1,r2\}$ и разобьем Ω на три непересекающихся множества $\Omega_0,\Omega_1,\Omega_2$ следующим образом: $\Omega_0=\left\{jc: l_j(t)\leq n_{j1}(t)\leq 1\right\}$, $\Omega_1=\left\{jc: 0\leq n_{j1}(t)\leq l_j(t)\wedge\right.$

$\wedge n_{j1}(t) + n_{j2}(t) < l_j(t)\Big\}$, $\Omega_2 = \Big\{jc : 0 \le n_{j1}(t) \le l_j(t) \wedge n_{j1}(t) + n_{j2}(t) \ge l_j(t)\Big\}$. Каждое разбиение в множестве $G(t)$ задает непересекащиеся области, в каждой из которых можно определить явную форму системы (2):

$$\begin{cases} n'_{i1}(t) = \sum_0 r_{j1i1}\mu_{j1} l_j(t) + \sum_1 r_{j1i1}\mu_{j1} n_{j1}(t) + \sum_2 r_{j1i1}\mu_{j1} n_{j1}(t) + \\ \qquad + \mu_{0i1}(t)\left(1 - \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{c=1}^{2} n_{jc}(t)\right); \\ n'_{i2}(t) = \sum_1 r_{j2i2}\mu_{j2} n_{j2}(t) + \\ \qquad + \sum_2 r_{j2i2}\mu_{j2}(l_j(t) - n_{j1}(t)) + \mu_{0i2}(t)\left(1 - \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{c=1}^{2} n_{jc}(t)\right), \end{cases} \tag{3}$$

где $\sum_0 = \sum\limits_{jc\in\Omega_0}$, $\sum_1 = \sum\limits_{jc\in\Omega_1}$, $\sum_2 = \sum\limits_{jc\in\Omega_2}$, $j = \overline{1, r}$, $c = 1, 2$.

Средние $n_{ic}(t)$ могут быть использованы при решении следующей задачи оптимизации сети МО по числу линий обслуживания в системах:

$$\begin{cases} W(T_1, T_2, m_1, ..., m_r) \to \min\limits_{m_i,\ i=\overline{1,r}}; \\ \frac{1}{T_2 - T_1}\int\limits_{T_1}^{T_2}\left[\sum\limits_{c=1}^{2} n_{ic}(t)\right]dt < \frac{1}{T_2-T_1}\int\limits_{T_1}^{T_2} l_i(t)dt,\ i = \overline{1, r}. \end{cases} \tag{4}$$

Решение данной задачи позволит определить число оценщиков и кассиров, минимизирующее функционал

$$W(T_1, T_2, m_1, ..., m_r) = \frac{1}{T_2 - T_1}\int\limits_{T_1}^{T_2}\left[\sum_{i=1}^{r}(d_{i1}n_{i1}(t) + d_{i2}n_{i2}(t) + E_i l_i(t))\right]dt,$$

описывающий средние относительные затраты на содержание сети на интервале времени $[T_1, T_2]$, коэффициенты d_{ic}, E_i имеют стоимостный смысл. Ограничения задачи (4) соответствуют требованию отсутствия в среднем очередей в системах сети.

3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим случай обслуживания однотипных заявок ($r = 2$) и предположим, что $K(t) = K \to \infty$. Для решения задачи (4) необходимо прежде всего определить компоненты $n_{ic}(t)$, $i, c = 1, 2$, что можно сделать, решив систему вида (3) в области соответствующей следующему разбиению множества индексов $n(t)$:

$$A:\ \Omega_0 = \{\emptyset\},\ \Omega_1 = \{11,\ 12\ ,21\ ,22\},\ \Omega_2 = \{\emptyset\}.$$

Система (3) имеет вид

$$\begin{cases} n'_{11}(t) = (\mu_{11} - \mu_{011}(t))n_{11}(t) - \mu_{011}(t)n_{12}(t) - \mu_{011}(t)n_{21}(t) - \\ \qquad -\mu_{011}(t)n_{22}(t) + \mu_{011}(t); \\ n'_{12}(t) = -\mu_{012}(t)n_{11}(t) + (-\mu_{12} - \mu_{012}(t))n_{12}(t) - \mu_{012}(t)n_{21}(t) - \\ \qquad -\mu_{012}(t)n_{22}(t) + \mu_{012}(t); \\ n'_{21}(t) = \mu_{11}n_{11}(t) - \mu_{21}n_{21}(t); \\ n'_{22}(t) = \mu_{12}n_{12}(t) - \mu_{22}n_{22}(t). \end{cases} \tag{5}$$

Предположим, что интенсивности поступления заявок $\mu_{011}(t)$, $\mu_{012}(t)$ являются кусочно-постоянными функциями времени с двумя интервалами постоянства $[0, T/2]$, $(T/2, T]$. Очевидно, что решения системы (5) на интервалах времени $[0, T/2]$ и $(T/2, T]$, найденные при начальных условиях $n_{ic}^{[0,T/2]}(0) = 0$ на интервале времени $[0, T/2]$ и $n_{ic}^{[T/2,T]}(T/2) = n_{ic}^{[0,T/2]}(T/2)$ на интервале $(T/2, T]$, не зависят от m_1, m_2. Задача (4) будет представлять собой задачу линейного программирования.

Пример. Решим задачу (4) для замкнутой сети массового обслуживания, в которой обрабатывается $K = 20000$ однотипных заявок. Параметры функционирования сети следующие: $d_{11} = 12$, $d_{12} = 3.8$, $d_{21} = 154$, $d_{22} = -16$, $E_1 = 0.5$, $E_2 = 0.2$, $T = 364$, $\mu_{011}^1 = 0.00006$, $\mu_{012}^1 = 0.001$, $\mu_{011}^2 = 0.00002$, $\mu_{012}^2 = 0.002$, $\mu_{11} = 1$, $\mu_{12} = 15$, $\mu_{21} = \mu_{22} = 100$.

В результате получаем, что $m_1 = 3$, $m_2 = 1$ на интервале времени $[0, 182]$ и $m_1 = 4$, $m_2 = 1$ на интервале $(182, 364]$.

В заключение отметим, что описанная здесь сеть с приоритетными заявками может быть использована в качестве модели процесса обработки исков (приоритетные заявки) и премий (неприоритетные заявки) в страховой компании. Задача (4) позволяет определить штатное расписание страховой компании с учетом производительности сотрудников и учетом затрат и прибыли на этапах обработки исков и премий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Параев Ю. И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976. 185 с.
2. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
3. *Медведев Г. А.* Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 199–203.
4. *Маталыцкий М. А., Романюк Т. В.* Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения. Гродно, 2003. 247 с.