АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РЕКУРРЕНТНЫХ И МС-ПОТОКОВ

А. Назаров, Е. Туренова

Томский государственный университет
Томск, Россия
nazarov@fpmk.tsu.ru

В данной работе доказано, что при достаточно больших интервалах наблюдения рекуррентные и МС-потоки эквивалентны.

Ключевые слова: рекуррентный поток, МС-поток, асимптотический анализ, марковский процесс, винеровский процесс, цепь Маркова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Случайные потоки однородных событий можно определять одним из трех способов: последовательностью моментов наступления событий в потоке $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, последовательностью длин интервалов между моментами наступления событий $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ либо случайным процессом $n(t)$, равным числу событий, наступивших в потоке за время t. В данной работе будем рассматривать описание случайного потока однородных событий случайным процессом $n(t)$. Покажем, что для достаточно больших интервалов длительности t стационарные потоки различных классов асимптотически эквивалентны и определяются лишь двумя константами λ и L, характеризующими среднее значение и дисперсию числа событий, наступивших за достаточно большой интервал времени.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Случайные потоки однородных событий будем называть рекуррентными, если длины интервалов между моментами наступления событий этого потока ν_n, $n = 1, 2, \ldots$, независимы и одинаково распределены. Обозначим $A(x)$ функцию распределения длин интервалов ν_n в этом потоке. Известно, что случайный процесс $n(t)$ для рекуррентного непуассоновского потока является немарковским. Поэтому для любого момента t определим величину $z(t)$, равную длине интервала от момента t до момента наступления очередного события в рассматриваемом потоке. Тогда двумерный случайный процесс $\{n(t), z(t)\}$ является марковским. Следовательно, для его распределения вероятностей

$$P(n, z, t) = P(n(t) = n, z(t) < z)$$

можно выписать равенство

$$P(n, z - \Delta t, t + \Delta t) = P(n, z, t) - P(n, \Delta t, t) + P(n-1, \Delta t, t)A(z) + o(\Delta t),$$

из которого для распределения $P(n, z, t)$ получим уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial P(n, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(n, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(n, 0, t)}{\partial z} + A(z)\frac{\partial P(n-1, 0, t)}{\partial z}. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) представляет определенные математические проблемы, поэтому найдем его методом асимптотического анализа марковизируемых систем [1]. Для этого определим бесконечно большую величину T ($T \to \infty$) и рассмотрим случайный процесс $n(t)$ для значений аргумента t, пропорциональных T.

Обозначим $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$, $t\varepsilon^2 = \tau$ и введем случайный процесс

$$y(\tau, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 n(\tau) - \lambda\tau}{\varepsilon^2}, \tag{2}$$

где значение константы λ будет определено ниже.

Для длин интервалов между моментами наступления событий ν_n в рекуррентном потоке обозначим

$$a = M\nu_n = \int_0^\infty x dA(x), \; a_2 = M\nu_n^2 = \int_0^\infty x^2 dA(x),$$

$$\sigma^2 = M(\nu_n - a)^2 = a_2 - a^2.$$

Через $w(\tau)$ обозначим стандартный винеровский процесс.

Теорема 1. *При $\varepsilon \to 0$ константа λ равна величине, обратной среднему значению*

$$\lambda = 1/a, \tag{3}$$

а случайный процесс $y(\tau) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} y(\tau, \varepsilon)$ имеет вид

$$y(\tau) = Lw(\tau), \tag{4}$$

где величина L определяется равенством

$$L^2 = \lambda^3 \sigma^2. \tag{5}$$

Доказательство теоремы в данной работе приводить не будем.

Следствие 1. *Для простейшего потока с параметром λ случайный процесс*

$$y(\tau) = \lambda w(\tau).$$

Случайные потоки однородных событий будем называть асимптотически эквивалентными, если для них процессы $y(\tau)$ имеют вид (4), а константы L и λ для этих потоков совпадают.

Следствие 2. *Если дисперсия длин интервалов между моментами наступления событий в рекуррентном потоке равна квадрату значения их математического ожидания, т. е. $\lambda = L$, то такой рекуррентный поток асимптотически эквивалентен простейшему потоку с параметром $\lambda = 1/a$.*

Далее проведем асимптотический анализ МС-потоков и покажем, что потоки этого класса асимптотически эквивалентны рекуррентным потокам с распределением $A(x)$, параметры которого L и λ совпадают с этими же параметрами МС-потока.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МС-ПОТОКОВ

Случайный поток однородных событий будем называть МС-потоком или дважды стохастическим потоком $n(t)$, управляемым цепью Маркова $\lambda(t)$, если для числа событий, наступивших в потоке за время t, выполняется равенство

$$P(n(t+\Delta t) = n+1 | n(t) = n, \lambda(t) = \lambda) = \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Здесь $\lambda(t)$ – цепь Маркова, принимающая значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, для которой заданы инфинитезимальные характеристики

$$q_{k_1k_2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(\lambda(t+\Delta t) = \lambda_{k_2} | \lambda(t) = \lambda_{k_1}),\ k_1 \neq k_2.$$

Состояния этой цепи будем определять величиной $k = 1, 2, \ldots$, а процесс их изменения во времени обозначим $k(t)$. В k-м состоянии рассматриваемая цепь Маркова $\lambda(t)$ принимает значения λ_k.

Так как случайный процесс $\{n(t), k(t)\}$ является двумерной цепью Маркова, то для ее распределения вероятностей

$$P(n, k, t) = P(n(t) = n, k(t) = k)$$

можно выписать следующее равенство:

$$\begin{aligned} P(n, k, t+\Delta t) = {} & (1 - \lambda_k\Delta t)(1 + q_{kk}\Delta t)P(n, k, t) + \\ & + \lambda_k\Delta t P(n-1, k, t) + \sum_{k_1 \neq k} P(n, k_1, t) q_{k_1k}\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

из которого получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(n,k,t)}{\partial t} + \lambda_k P(n,k,t) = \lambda_k P(n-1,k,t) + \sum_{k_1} P(n, k_1, t) q_{k_1k}. \tag{6}$$

Аналогично случаю рекуррентного потока рассмотрим случайный процесс

$$y(\tau, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 n(\tau) - \lambda\tau}{\varepsilon^2}, \tag{7}$$

где значение константы λ будет определено ниже, а $n(t)$ определяет рассматриваемый МС-поток.

Теорема 2. *Если для цепи Маркова $\lambda(t)$ существует стационарное распределение вероятностей $R(k)$ ее состояний k, то при $\varepsilon \to 0$ значение величины λ составляет*

$$\lambda = \sum_k \lambda_k R(k),$$

а случайный процесс $y(\tau) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} y(\tau, \varepsilon)$ имеет вид $y(\tau) = Lw(\tau)$, где $w(\tau)$ – стандартный винеровский процесс, а величина L определяется равенством

$$L^2 = \lambda + 2\sum_k (\lambda - \lambda_k)h(k).$$

Здесь h_k являются решением системы (11).

Доказательство. В уравнении (6) выполним замены

$$t\varepsilon^2 = \tau,\ n\varepsilon^2 = \lambda\tau + \varepsilon y,\ \frac{1}{\varepsilon}P(n,k,t) = \pi(y,k,\tau,\varepsilon),$$

получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial\pi(y,k,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} - \varepsilon\lambda\frac{\partial\pi(y,k,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \lambda_k\pi(y,k,\tau,\varepsilon) =$$
$$= \lambda_k\pi(y-\varepsilon,k,\tau,\varepsilon) + \sum_{k_1}\pi(y,k_1,\tau,\varepsilon)q_{k_1k}. \qquad (8)$$

Это уравнение будем решать в три этапа.

Этап 1. В уравнении (8) положим $\varepsilon = 0$ и, обозначив

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\pi(y,k,\tau,\varepsilon) = \pi(y,k,\tau),$$

запишем его в виде

$$\sum_{k_1}\pi(y,k_1,\tau)q_{k_1k} = 0.$$

Решение этого уравнения можно записать следующим образом:

$$\pi(y,k,\tau) = R(k)\pi(y,\tau),$$

тогда для $R(k)$ получим систему

$$\sum_{k_1}R(k_1)q_{k_1k} = 0, \qquad (9)$$

совпадающую с системой уравнений Колмогорова для стационарного распределения вероятностей $R(k)$ состояний цепи Маркова $k(t)$. Будем полагать, что решение системы (9) удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_k R(k) = 1.$$

Этап 2. Перепишем уравнение (8) следующим образом:

$$\sum_{k_1} \pi(y, k_1, \tau, \varepsilon) q_{k_1 k} = \varepsilon(\lambda_k - \lambda) \frac{\partial \pi(y, k, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + o(\varepsilon).$$

Будем искать его решение $\pi(y, k, \tau, \varepsilon)$ в виде

$$\pi(y, k, \tau, \varepsilon) = R(k)\pi(y, \tau) + \varepsilon h(k) \frac{\partial \pi(y, \tau)}{\partial y} + o(\varepsilon). \tag{10}$$

Учитывая равенство (9), получим, что $h(k)$ удовлетворяет неоднородной системе уравнений

$$\sum_{k_1} h(k_1) q_{k_1 k} = (\lambda_k - \lambda) R(k). \tag{11}$$

Так как сумма по k левых частей этих уравнений равна нулю, то для существования решения $h(k)$ этой системы необходимо выполнение равенства

$$\lambda = \sum_k \lambda_k R(k). \tag{12}$$

Следовательно, величина λ определяется равенством (12) и равна стационарному среднему значению цепи Маркова $\lambda(t)$. Решение $h(k)$ системы (11) определяется с точностью до константы в виде

$$h(k) = h(k) + cR(k).$$

Из (10) для функции $\pi(y, \tau, \varepsilon) = \sum_k \pi(y, k, \tau, \varepsilon)$ можно записать

$$\pi(y, \tau, \varepsilon) = \pi(y, \tau) + \varepsilon h \frac{\partial \pi(y, \tau)}{\partial y} + o(\varepsilon), \tag{13}$$

где $h = \sum_k h(k)$, а величины $h(k)$ определяются системой (11).

Этап 3. Просуммируем по k обе части уравнения (8). Получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon\lambda \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \sum_k \lambda_k \pi(y, k, \tau, \varepsilon) = \\ = \sum_k \lambda_k \pi(y - \varepsilon, k, \tau, \varepsilon).$$

Затем раскладываем функции $\pi(y - \varepsilon, k, \tau, \varepsilon)$ в ряд Тейлора по приращению аргумента y с точностью до $o(\varepsilon^2)$. В результате

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \pi(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \Big\{ \lambda \pi(y, \tau, \varepsilon) - \sum_k \lambda_k \pi(y, k, \tau, \varepsilon) \Big\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big\{ \sum_k \lambda_k \pi(y, k, \tau, \varepsilon) \Big\} + o(\varepsilon^2).$$

Подставим в последнее равенство разложения (10) и (13), и после упрощения получим уравнение

$$\frac{\partial \pi(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \{ \lambda + 2[\lambda h - \sum_k \lambda_k h(k)] \} \frac{\partial^2 \pi(y, \tau)}{\partial y^2},$$

которое является уравнением Фоккера – Планка для плотности распределения вероятностей диффузионного процесса $y(\tau)$ вида

$$y(\tau) = Lw(\tau),$$

где величина L определяется равенством

$$L^2 = \lambda + 2\sum_k (\lambda - \lambda_k) h(k).$$

Теорема доказана.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, МС-поток, определяемый значительным числом парметров: значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ цепи Маркова, ее инфинитезимальными характеристиками $q_{k_1k_2}$ – асимптотически определяется лишь двумя параметрами λ и L, смысл которых определен выше. А для того, чтобы построить рекуррентный поток, асимптотически эквивалентный МС-потоку, достаточно определить для него функцию распределения $A(x)$ таким образом, чтобы его асимптотические параметры λ и L совпадали с соответствующими параметрами МС-потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1991.
2. *Tsarenkov G. V., Dudin A. N., Klimenok V. I.* Robust algorithm for evaluating the stationary probabilities of $BMAP/SM/1/N$ queue // Computer Data Analysis and Modelling: Proc. of the 6th Int. Conf. / eds. Aivazian S. A., Kharin Yu. S., Rieder H. Minsk: BSU, 2001. V. 3. P. 123–130.
3. *Назаров А. А., Коцюруба П. И.* Локальная диффузионная аппроксимация процесса изменения состояний неустойчивой сети случайного доступа в окрестности асимптотического среднего // Проблемы передачи информации. 2004. № 1. С. 85–97.
4. *Назаров А. А., Цой С. С.* Общий подход к исследованию марковских моделей сетей передачи данных, управляемых статическими протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 2004. № 4. С. 73–85.